REVISTA PERTINENCIA ACADÉMICA
VICERRECTORADO ACADÉMICO ISSN 2588-1019

SISTEMA DE EXERCÍCIOS RESOLVIDOS E PROPOSTOS PARA O DESENVOLVIMENTO DO TRABALHO INDEPENDENTE

RESOLVED AND PROPOSED EXERCISE SYSTEM FOR THE DEVELOPMENT OF INDEPENDENT WORK

https://doi.org/10.5281/zenodo.3338668

AUTORES: Osvaldo Amândio Wanga Sachilepa [1]

DIRECCIÓN PARA CORRESPONDENCIA: osvaldo21desetembrosachilepa@hotmail.com

Fecha de recepción: 18 de Marzo de 2019

Fecha de aceptación: 15 de Mayo de 2019

RESUMO

Este artigo descreve um sistema de exercícios resolvidos e propostos para o desenvolvimento do trabalho independente que assegurem as condições prévias dos estudantes do 3º ano do Curso de Matemática na disciplina Equações Diferenciais com Derivadas Parciais para auxiliar no ensino da Matemática na disciplina de Equaçoes Diferenciais com Derivadas Parciais do curso de Matematica da Escola Superior Pedagógica do Bié-ESPB. A proposta é constituída por exercícios que permite o asseguramento das condições prévias dos estudantes nestas vertente. Os primeiros resultados evidenciam que a estratégia pode de fato proporcionar uma aprendizagem significativa dos conceitos envolvidos no processo

PALAVRAS-CHAVE: sistema de exercícios, trabalho independente, Equações Diferenciais com Derivadas Parciais.

ABSTRACT

This article describes a system of solved and proposed exercises for the development of independent work that ensure the preconditions of the students of the 3rd year of the Mathematics Course in the discipline Differential Equations with Partial Derivatives to assist in the teaching of Mathematics in the discipline of Equation Differences with Partial Derivatives of the Mathematics course of the Bié-ESPB Higher Pedagogical School. The proposal is constituted by exercises that allows the assurance of the preconditions of the students in these aspects. The first results show that the strategy can in fact provide a meaningful learning of the concepts involved in the process.

KEYWORDS: exercise system, independent work, Differential Equations with Partial Derivatives.

[1] Mestre.Escola Superior Pedagógica do Bié-ESPB.

INTRODUÇÃO

O ensino superior, principalmente aquele que era desenvolvido na única universidade pública do país (Angola) vem enfrentando um conjunto de desafios que tem afectado positivamente os resultados do processo do ensino-aprendizagem. De um lado sabemos que o aumento significativo das matriculas nesse órgão (universidade) tem levado as salas de aulas um incremento de situações que redundam em prejuízo na aprendizagem dos jovens. De outro lado, são colocados aos corpo docentes novos desafios e responsabilidades das expectativas da sociedade diante das novas transformações que tem lugar em todas instituições e níveis de ensino superior(Hernandez, Cueva, & Roca).

Não se pode deixar unicamente a cargo dos docentes a superação das novas dificuldades que lhe são colocadas, embora estejam elas no âmbito do atendimento profissional de classes heterogéneas, quanto a motivação, ou no que se refere a sua competência conceptual e técnica para o desenvolvimento de um ensino principalmente nos conteúdos científicos, mas condigentes com os tempos actuais.

Assim há momentos em que se nota ênfase acentuada nos factores externos ao desenvolvimento e a aprendizagem, noutros momentos os determinantes da relação desenvolvimento e aprendizagem, são factores internos e ainda cumpre destacar que, há aqueles momentos em que se nota uma tendência a aceitar como pertinente a ideia de dissociação entre desenvolvimento e aprendizagem.

Essa dicotomia entre o desenvolvimento traz consequências para a organização dos programas de ensino e para a forma metodológica de difusão do conhecimento matemático.

De facto o conhecimento matemático não se consolida como um rol de ideias, prontas a serem memorizadas, muito além disso, um processo significativo de ensino matemático deve conduzir os estudantes a exploração de uma grande variedade de ideias e de estabelecimento de relações entre factos e conceitos de modo a incorporar os contexto do mundo real(Estupiñan-Ricardo & de Mora-Litardo).

Nesse o professor devem actuar como agentes de mudanças tendo em conta as percepções e as suas opiniões face a problemática do das dificuldades na aprendizagem equações diferencias com derivadas parciais já que é uma cadeira de difícil compreensão para os estudantes de matemática do ISCED-Huambo.

O estudo das equações diferenciais com derivadas parciais tem a ver com o estudo e resolução de problemas que são formulados ao nível da geometria e da física. Por isto estas equações diferencias com derivadas parciais, particularmente as de 2ª ordem, são designadas como equações da Físico-matemática.

Na cadeira faz-se uma abordagem essencialmente aos métodos de solução de equações diferencias com derivadas parciais de 1ª ordem assim como a problemática de recinto, fronteira e classificação para equações diferencias com derivadas parciais de 2ª ordem que se resolvem sem o recurso às funções especiais.

Esta cadeira vem na sequência da cadeira de equações diferencias ordinárias, leccionada no antigo sistema no 4º ano do curso na qual se faz uma introdução aos métodos de integração das equações diferenciais ordinárias. E era complementada por outra que retrata a cadeira da mesma área cientifica, problema de limite de funções de variável complexa, também leccionada no 5º ano, na qual se estudam alguns problemas para equações em derivadas parciais cujas soluções conduzem a funções especiais ou variável complexa(Estupiñán Ricardo et al., 2018).

A mesma cadeira fez sempre parte do curso de matemática desde a sua implementação. Actualmente neste sistema, atendendo a reforma educativa é leccionada 3º ano no curso de matemática.

Os pesquisadores deste trabalho que têm como temam: Proposta de um Sistema de Exercícios para garantir as condições previas dos estudantes de Terceiro Ano do curso de Matemática na disciplina Equações Diferenciais com derivadas parciais, vêm-se preocupados com a actual situação da cadeira visto que esta disciplina por sua importância requer materiais para desenvolver o trabalho independente nos estudantes e cumprir com os objectivos da aprendizagem. Além disso a inexistência de livros, a instabilidade no processo docente educativo devido as interrupções (feriados, tolerâncias, e outros) têm incidido na qualidade deste processo.

BREVE RESENHA HISTÓRICA O CALCULO DIFERENCIAL

Cálculo, ramo da matemática que se ocupa do estudo dos incrementos nas variáveis, pendentes de curvas, valores máximo e mínimo de funções e da determinação de longitudes, áreas e volumes. O seu uso é muito extenso, sobre tudo em ciências e engenharia, sempre que houver quantidades que variam de forma contínua.

O cálculo se deriva da antiga geometria grega. Demócrito calculou o volume de pirâmides e cones, acredita-se que considerando os formados por um número infinito de secções de grossura infinitesimal (infinitamente pequeno), Eudoxo e Arquimedes utilizaram o método de esgotamento para encontrar a área de um círculo com a exactidão requerida mediante o uso de polígonos inscritos. Entretanto, as dificuldades para trabalhar com números irracionais e os paradoxos do Zenón lhe impediram de formular uma teoria sistemática do cálculo. No século XVII, Francesco B. Cavalieri e Evangelista Torricelli ampliaram o uso dos infinitésimos, Descarte e Pierre do Fermat utilizaram a álgebra para encontrar as áreas e as tangentes (integração e diferenciação em termos modernos). Fermat e Isaac Barrow tinham a certeza de que ambos os cálculos estavam relacionados, embora foram Isaac Newton (por volta de 1660) e Gottfried W. Leibniz (por volta de 1670) quem demonstrou que são inversos, o que se conhece como teorema fundamental do cálculo. O descobrimento do Newton, a partir de sua teoria da gravidade, foi anterior ao do Leibniz, mas o atraso em sua publicação ainda provoca disputas sobre quem foi o primeiro. Entretanto, terminou por adoptá-la notação do Leibniz.

No século XVIII aumentou gradualmente o número de aplicações do cálculo, mas o uso inadequado das quantidades infinitas e infinitesimais, assim como a intuição geométrica, causavam ainda confusão e controvérsia sobre seus fundamentos. Um de seus críticos mais notáveis foi o filósofo irlandês George Berkeley. No século XIX os analistas matemáticos substituíram essas variedades por fundamentos sólidos apoiados em quantidades finitas: Bernhard Bolzano e Augustin Louis Cauchy definiram com precisão os limites e as derivadas; Cauchy e Bernhard Riemann fizeram o próprio com as integrais, e Julius Dedekind e Karl Weierstrass com os números reais. Por exemplo, sabe-se que as funções diferenciáveis são contínuas e que as funções contínuas que são integráveis, embora os recíprocos são falsos. No século XX, a análise não convencional, legitimou o uso dos infinitésimos. Ao mesmo tempo, a aparição dos ordenadores ou computadores incrementou as aplicações do cálculo.

Derivadas Parciais

As funções com varias variáveis têm também derivadas. Seja $z = f$ (x, y), quer dizer, z é função de x e y. Se manter a variável y como constante temporalmente, z é uma função de x, que ao diferenciar se obtém a derivada parcial $\frac{dz}{dx} = \frac{df}{dx}$; da mesma maneira, se tomar a variável x como constante e se diferenciar em relação à y se obtém $\frac{dz}{dy} = \frac{df}{dy}$.

Por exemplo, se $z = x^2 - xy + 3e^2$ se tem que $\frac{dz}{dx} = 2x - y$ e que $\frac{dz}{dy} = -x$. Geometricamente, uma equação $z = f$ (x, y) define uma superfície em um espaço tridimensional; se os eixos x e y são horizontais e o eixo z é vertical, então $\frac{dz}{dx}$ e $\frac{dz}{dy}$ representam os gradientes de dita superfície no ponto (x, y, z) na direcção dos eixos x e y, respectivamente. As derivadas parciais também se pode calcular para funções com mais de duas variáveis, considerando que todas as variáveis menos uma são constantes e derivando a respeito a esta. Utilizando este procedimento é possível calcular derivadas parciais de ordem superior. As derivadas parciais são importantes na matemática aplicada, pois existem funções que dependem de diversas variáveis, como o espaço e o tempo(Hernandez et al., 2019).

Equação Diferencial

Frequentemente, as Equações Diferenciais representam leis naturais relativas à velocidade de uma determinada mudança. Uma *solução* de uma Equação Diferencial é uma função y = f (x) que satisfaz a equação; a *solução geral* é uma fórmula que representa todas as soluções possíveis.

Uma equação diferencial de ordem *n* é uma equação em que figura a derivada enésima, denotada por $\frac{d^n z}{dx^n} = f^n(x)$ e nenhuma derivada de ordem superior.

Uma equação diferencial é a que contém as derivadas de uma variável dependente com respeito a uma ou mais independentes. Esta equação pode ter presente as variáveis somente nas derivadas.

Exemplos:

1. $y'' + y = e^x$
2. $\left(\frac{d^4 s}{dt^4}\right)^2 + 2\left(\frac{d^2 s}{dt^2}\right)^5 + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 0$
3. $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 0$
4. $\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad con\ u = U(t,x)$

Tendo em conta o tipo de derivadas que estão presente em uma equação diferencial, estas classificam-se em ordinárias e parciais.

As ***equações diferenciais ordinárias*** são as que contêm derivadas de uma variável dependente a respeito a uma variável independente, os exemplos 1 e 2 citados anteriormente são equações diferenciais ordinárias.

As ***equações diferenciais parciais*** são as que contêm derivadas de uma variável dependente a respeito a duas ou mais variáveis independentes, os exemplos 3 e 4 citados anteriormente são exemplos são equações diferenciais em derivadas parciais.

Dispõe-se de muitos métodos potentes para resolver distintos tipos de equações diferenciais, mas não há um método único que resolva todas, e em alguns casos só podem achar-se soluções aproximadas mediante técnicas numéricas. As equações diferenciais parciais implicam derivadas parciais de uma função de duas ou mais variáveis.

A VINCULAÇÃO DE CONHECIMENTOS ANTERIORES E POSTERIORES COMO REQUISITO FUNDAMENTAL NO DESENVOLVIMENTO DO PROCESSO DOCENTE EDUCATIVO DA MATEMÁTICA

No processo docente educativo, é importante considerar o que o indivíduo já sabe de tal maneira que estabeleça uma relação com aquilo que deve aprender. Este processo tem lugar se o educando tiver em sua estrutura cognitiva conceitos, estes são: ideias, proposições, estáveis e definidos, com os quais a nova informação pode interactuar. (Ausubel, 1992)

Por "estrutura cognitiva" entende-se o conjunto de conceitos, ideias que um indivíduo possui em um determinado campo do conhecimento, assim como sua organização. Segundo Ausubel (1992) no processo de orientação da aprendizagem, é de vital importância conhecer a estrutura cognitiva do aluno; não só se trata de saber a quantidade de informação que possui, mas também quais são os conceitos e proposições que dirige assim como o seu grau de estabilidade.

Na solução de exercícios no desenvolvimento do processo docente educativo da Matemática Superior é importante que se integrem os conteúdos do ensino médio geral com os deste nível de forma tal que se contribua a que os estudantes desenvolvam as habilidades necessárias para compreender os novos conteúdos.

Ausubel distingue duas etapas nos processos que desenvolvem os alunos para realizar uma aprendizagem significativa:

- Etapa de diferenciação progressiva dos novos conhecimentos com respeito aos que já têm.
- Etapa de reconciliação integradora desses novos conhecimentos com os já existentes.

Para o Ausubel (1968), por exemplo, tudo é questão de estabelecer relações; estas vêm facilitadas pela existência de "pontes cognitivos" que fazem que a informação cobre significado por sua relação com a estrutura global lhe pré existam. Segundo ele, os novos conhecimentos só se podem aprender se se reúnem três condições: em primeiro lugar, a disponibilidade de conceitos mais gerais que se vão diferenciando progressivamente no decurso da aprendizagem; em segundo lugar, a posta em marcha de uma "consolidação" para facilitar o domínio das lições em curso, pois não se pode propor informações novas enquanto não se dominam as informações precedentes. Se não se cumprir esta condição, a aprendizagem de todos os conhecimentos pode ver-se comprometido. Finalmente, a terceira condição, "a conciliação integradora", consiste em distinguir as semelhanças e as diferenças entre os antigos conhecimentos e os novos, em delimitá-los e resolver eventualmente as contradições; a partir daí, deve conduzir obrigatoriamente a reformula-los.

A aprendizagem no qual o aluno não põe nada de sua parte, eliminando assim o efeito de feedback que todo descobrimento pessoal comporta, não é uma aprendizagem significativa, por isso o autor considera que desenvolver um processo docente educativo apoiado na solução de problemas potencializa este tipo de aprendizagem, não sendo assim a colocação unicamente de exercícios com soluções óbvias(Hernández, Izquierdo, Leyva-Vázquez, & Smarandache, 2018).

É por isso que se expõe que a teoria do Ausubel sobre aprendizagem significativa, enriquecida por outros pedagogos contemporâneos, constitui um elemento importante para a utilização de estratégias cognitivas de aprendizagem, como a resolução de problemas, através da qual se geram situações para o desenvolvimento de processos de pensamento que promovem acções e reacções, como mecanismos que propiciam a cognição, questão que se torna difícil no ensino de ciências abstractas como a Matemática.

Segundo a teoria do Ausubel, relacionada com antecedência, a aprendizagem significativa é onde o aluno relaciona o que já sabe com os novos conhecimentos pelo qual para obter este propósito em nossos estudantes é necessário que se activem os conhecimentos do ensino médio geral que não foram sistematizados os quais equivalem a suas experiências necessárias para poder tratar os novos conhecimentos.

De acordo com esta teoria a assimilação é o processo mediante o qual a nova informação é vinculada com aspectos relevantes e pré-existentes na estrutura cognitiva, processo em que se modifica a informação recentemente adquirida e a estrutura que lhe pré-existam (Ausubel; 1983). “Este processo de interação modifica tanto o significado da nova informação como o significado do conceito ou proposição ao qual está afiançada”. (Ausubel; 1983:120).

Ausubel distingue três tipos de aprendizagem:

- Aprendizagem Subordinado

Esta aprendizagem se apresenta quando a nova informação é vinculada com os conhecimentos pertinentes da estrutura cognitiva prévia do aluno, quer dizer quando existe uma relação de subordinação entre o novo material e a estrutura cognitiva lhe pré-existam, é o típico processo de sub sucessão.

- Aprendizagem Supraordinado

Ocorre quando uma nova proposição se relaciona com ideias subordinadas específicas já estabelecidas, "têm lugar no curso do raciocínio indutivo ou quando o material exposto […] implica a síntese de ideias componentes" (Ausubel; 1983:83). A ideia subordinada se define mediante um conjunto novo de atributos, de critérios que abrangem as ideias subordinadas.

- Aprendizagem Combinatório

Este tipo de aprendizagem se caracteriza porque a nova informação não se relaciona de maneira subordinada, nem supraordinada com a estrutura cognitiva prévia, a não ser se relaciona de maneira geral com aspectos relevantes da estrutura cognitiva. É como se a nova informação fora potencialmente significativa com toda a estrutura cognitiva.

No processo de assimilação as ideias prévias existentes na estrutura cognitiva se modificam adquirindo novos significados. A presença sucessiva deste facto "Produz uma elaboração adicional hierárquica dos conceitos ou proposições" (Ausubel;1983:539), dando lugar a uma diferenciação progressiva. Este é um facto que se apresenta durante a assimilação, pois os conceitos sub sensores estão sendo refeitos e modificados constantemente, adquirindo novos significados, quer dizer, progressivamente diferenciados. Este processo se apresenta geralmente na aprendizagem subordinada (especialmente no corelativo).

Por isso a programação dos conteúdos não só deve proporcionar uma diferenciação progressiva mas também deve explorar explicitamente as relações entre conceitos, ressaltando as diferenças e similitudes importantes, para logo reconciliar as incongruências reais ou aparentes.

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES HOMOGÉNEAS COM COEFICIENTES CONSTANTES

O seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = a_1 x + b_1 y \\ \dot{y} = a_2 x + b_2 y \end{cases}$$ onde x e y são funções da variável t, define um sistema de equações diferencias lineares homogéneas com coeficientes constantes.

Uma solução do sistema é um par de funções x = F(t) e y = G(t), que satisfaçam simultaneamente sobre um intervalo dado, cada uma das equações.

O sistema anterior apresentado em notação matricial será:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

onde $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ a matriz dos coeficientes das variáveis no sistema.

O sistema poderá converter-se numa equação diferencial de segunda ordem, derivando a segunda ordem a primeira equação com respeito a t, isto é:

$\ddot{x} = a_1\dot{x} + b_1\dot{y} = a_1\dot{x} + b_1(a_2x + b_2y) = a_1\dot{x} + b_1a_2x + b_1b_2y$ mas, fazendo $y = \dfrac{\dot{x} - a_1x}{b_1}$ na equação 1 do sistema, substituindo na 1ª equação do sistema derivada, tem-se que:

$\ddot{x} = a_1\dot{x} + b_1a_2x + b_1b_2\left(\dfrac{\dot{x} - a_1x}{b_1}\right)$ de onde, transformando $\ddot{x} - (a_1 + b_2)\dot{x} + (a_1b_2 - a_2b_1)x = 0$, associando esta equação, a equação característica: $m^2 - (a_1 + b_2)m + (a_1b_2 - a_2b_1) = 0 \Leftrightarrow m^2 - trAm + |A| = 0$

cujas raízes são: $m_{1,2} = \dfrac{(a_1 + b_2) \pm \sqrt{(a_1 + b_2)^2 - 4(a_1b_2 - a_2b_1)}}{2} = \dfrac{trA \pm \sqrt{trA^2 - 4|A|}}{2}$

onde $trA = a_1 + b_2$ e $|A| = a_1b_2 - a_2b_1$

Como se sabe, tendo as raízes da equação características, temos as soluções de x e substituindo em uma das equações do sistema, obtêm-se a outra solução do sistema.

De recordar que pelas propriedades das raízes de uma equação do segundo grau, pode-se elaborar que: $m_1 + m_2 = trA, \quad m_1.m_2 = |A|$.

Características das raízes:

Se $(trA)^2 - 4|A| > 0 \Rightarrow m_1, m_2 \in R; \quad m_1 \neq m_2$ (soluções reais distintas)

$$x(t) = c_1e^{m_1t} + c_2e^{m_2t}$$

$$y(t) = \frac{m_1 - a_1}{b_1}c_1e^{m_1t} + \frac{m_2 - a_1}{b_1}c_2e^{m_2t}; \quad c_1, c_2 \in R$$

Se $(trA)^2 - 4|A| = 0 \Rightarrow m_1, m_2 \in R; \quad m_1 = m_2 = m$ (soluções reais iguais)

$$x(t) = (c_1 + c_2t)e^{mt}$$

$$y(t) = \frac{(c_1 + c_2t)(m - a_1) + c_2}{b_1}e^{mt}; \quad c_1, c_2 \in R$$

I. Se $(trA)^2 - 4|A| < 0 \Rightarrow m_1, m_2 \in C; \quad m_{1,2} = a \pm bi$ (soluções complexas conjugadas.

$$x(t) = e^{at}(c_1 \cos bt + c_2 senbt)$$

$$y(t) = e^{at}\left\{\left[\frac{(a - a_1)c_1 + bc_2}{b_1}\right]\cos bt - \left[\frac{(a - a_1)c_2 + bc_1}{b_1}\right]senbt\right\}$$

onde $x(t)$ e $y(t)$ são as trajectórias temporais do sistema.

Para o S.E.D. lineares homogéneos estudados anteriormente, o ponto de equilíbrio será (0,0) e a seguinte tabela permite conhecer o tipo de equilíbrio através das características das raízes:

Caso	Raízes da equação característica	Tipo de equilíbrio
$(trA)^2 > 4\lvert A\rvert$	$m_1 < 0; \quad m_2 < 0; \quad m_1 \neq m_2$	Nodo estável
	$m_1 > 0; \quad m_2 > 0; \quad m_1 \neq m_2$	Nodo instável
	$\operatorname{sgn} m_1 \neq \operatorname{sgn} m_2$	Ponto de Silla
$(trA)^2 = 4\lvert A\rvert$	$m_1 = m_2 < 0$	Nodo estável
	$m_1 = m_2 > 0$	Nodo instável
$(trA)^2 < 4\lvert A\rvert$	$m_{1,2} = a \pm bi; \quad a < 0$	Foco estável
	$m_{1,2} = a \pm bi; \quad a > 0$	Foco instável
	$m_{1,2} = a \pm bi; \quad a = 0$	Centro ou Vórtice

EQUAÇÕES DIFERENCIAS LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM COMPLETOS

O seguinte sistema:

$$\begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + p(t) \\ y' = a_2 x + b_2 y + q(t) \end{cases},$$

onde p e q são funções de t, que como caso particular, podem ser constantes, definem um sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem completo com coeficientes constantes.

Na forma matricial, será:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

A solução geral do sistema se obtém somando a solução geral do sistema homogéneo (função ou solução complementar) com a solução particular chamada também curva integral particular, do sistema completo.

O sistema pode-se resolver convertendo-o numa equação diferencial completa de segunda ordem e primeiro grau.

Consideremos um sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1 x + b_1 y + p(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2 x + b_2 y + q(t) \end{cases}$$

Vejamos como determinar as soluções deste tipo de S.E.D. quando p(t) e q(t) são funções de t diferentes da constante; para tal utilizamos os operadores diferenciais tratados anteriormente e a regra de Cramer estudada na Álgebra Linear para a resolução de sistemas de equações lineares; do seguinte modo:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases} \qquad x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

O sistema resolve-se diferenciando as equações dadas para eliminar uma das vereáveis e obtemos uma equação diferencial com uma só variável dependente. Esta equação resolve-se pelos métodos já estudados; depois se obtém uma outra equação diferencial onde apareça a outra variável dependente e resolve-se. Utilizarmos operadores diferencias lineares neste processo de eliminação, o qual é similar ao que se emprega para resolver sistemas de equações lineares algébricas.

ACTIVIDADE ILUSTRATIVA

Resolver o seguinte sistemas de equações diferencias:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4t - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 5 + 2x \end{cases} .$$

Utilizando a notação operacional, escreve-se na seguinte forma: $\begin{cases} Dx + 2y = 4t \\ -2x + Dy = 5 \end{cases}$

Acha-se o determinante do sistema:

$$\begin{vmatrix} D & 2 \\ -2 & D \end{vmatrix} = D^2 + 4$$

É um polinómio do 2º grau, isto implica que a solução geral do sistema tem duas constantes arbitrárias.

Aplicando a regra de Cramer, sobre a variável x tem-se que:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4t & 2 \\ 5 & D \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D & 2 \\ -2 & D \end{vmatrix}} \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} D & 2 \\ -2 & D \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} 4t & 2 \\ 5 & D \end{vmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$(D^2+4)x = D(4t)-10$$

$$(D^2+4)x = 4-10$$

$$(D^2+4)x = -6$$

Esta última equação representa uma equação diferencial completa de 2º ordem com coeficientes constantes.

Para resolver a equação diferencial, será aplicado o mesmo procedimento já utilizado anteriormente:

1º. Equação reduzida: $(D^2+4)x = 0.$

$$m^2+4=0 \qquad m_{1,2} = \pm 2i \qquad a=0; \qquad b=2$$

$$solução\ complexa.$$

onde o tipo de equilíbrio é Centro ou Vórtice.

Como solução homogénea ou complementaria tem-se: $x_c(t) = c_1\cos 2t + c_2 sen 2t$.

2º: Equação completa. Solução particular.

Utilizando o método de coeficientes indeterminados, atendendo a forma que tem o termo independente F(t) = -6

$$x_p(t) = A$$

Substituindo na equação, tem-se que:

$$(D^2+4)x = -6$$

$$(D^2+4)A = -6$$

$$0+4A=-6 \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{3}{2} \qquad \therefore x_p(t) = -\frac{3}{2}$$

3º: A solução geral será:

$x_g(t) = c_1\cos 2t + c_2 sen 2t - \dfrac{3}{2}$ que representa a trajectória temporal $x(t)$.

Agora, substitui-se numa das equações do sistema para obter a outra trajectória.

Substituindo na primeira, tem-se que:

$$D(c_1\cos 2t + c_2 sen2t - \frac{3}{2}) + 2y = 4t$$

$$-2c_1 sen2t + 2c_2\cos 2t + 2y = 4t$$

Isolando y tem-se que:

$y_g(t) = c_1 sen2t - c_2\cos 2t + 2t$, que representa a trajectória temporal $y(t)$.

Portanto, a solução geral do sistema é: $x_g(t) = c_1\cos 2t + c_2 sen2t - \frac{3}{2}$; $y_g(t) = c_1 sen2t - c_2\cos 2t + 2t$, que representa as trajectórias inter temporais.

ACTIVIDADE ILUSTRATIVA

Resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases}(D+2)x + (D+1)y = t\\ 5x + (D+3)y = t^2\end{cases}$$

Primeiramente, calcula-se o determinante do sistema, tem-se:

$$\begin{vmatrix} D+2 & D+1\\ 5 & D+3\end{vmatrix} = D^2 + 1$$

cujo polinómio é de segundo grau, por tanto a solução do sistema tem duas constantes arbitrarias.

Aplicamos a regra de Cramer a respeito da variável y, ou seja:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} D+2 & t\\ 5 & t^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D+2 & D+1\\ 5 & D+3\end{vmatrix}}$$

$$\begin{vmatrix} D+2 & D+1\\ 5 & D+3\end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} D+2 & t\\ 5 & t^2\end{vmatrix}$$

$$(D^2+1)y = (D+2)t^2 - 5t = D(t^2) + 2t^2 - 5t = 2t - 5t + 2t^2 = 2t^2 - 3t$$

$$(D^2+1)y = 2t^2 - 3t$$

onde a última equação representa a uma equação diferencial completa de segundo ordem, com função $F(t) = -2t^2 - 3t$.

A equação $(D^2+1)y=0$ representa a equação reduzida ou homogénea, cuja equação característica é:
$m^2+1=0 \quad \Rightarrow \quad m_{1,2}=\pm i; \quad a=0; \quad b=1$

com trajectória temporal $y_c(t)=c_1\cos t+c_2 sent$

onde se tem como a solução particular: $y_p(t)=At^2+Bt+C$

$$y'_p(t)=2At+B$$
$$y''_p(t)=2A$$

Substituindo, tem-se que:

$$2A+At^2+Bt+C=2t^2-3t \qquad At^2=2t^2 \Rightarrow A=2$$
$$Bt=-3t \Rightarrow B=-3 \qquad 2A+C=0 \Rightarrow C=-4$$

Portanto $y_p(t)=2t^2-3t-4$

A solução geral da E.D.O completa será:

$y_g(t)=c_1\cos t+c_2 sent+2t^2-3t-4$, que representa a trajectória temporal.

Substituindo na segunda equação do sistema:

$$5x+Dy+3y=t^2$$
$$5x=-Dy-3y+t^2$$
$$5x=-D(c_1\cos t+c_2 sent+2t^2-3t-4)-3(c_1\cos t+c_2 sent+2t^2-3t-4)+t^2$$
$$5x=c_1 sent-c_2\cos t-4t+3-3c_1\cos t-3c_2 sent-6t^2+9t+12+t^2$$
$$5x=(c_1-3c_2)sent-(3c_1+c_2)\cos t+5t-5t^2+15$$
$$x_g(t)=\frac{1}{5}(c_1-3c_2)sent-\frac{1}{5}(3c_1+c_2)\cos t+t+-t^2+3$$

que representa a trajectória temporal x(t) com respeito a variável t.

Logo, a solução geral do sistema, será:

$$x(t) = \frac{1}{5}(c_1 - 3c_2)sent - \frac{1}{5}(3c_1 + c_2)\cos t + t - t^2 + 3$$

$$y(t) = c_1 \cos t + c_2 sent + 2t^2 - 3t - 4$$

CONCLUSÃO

Após uma análise do sistema de exercícios resolvidos e propostos para o desenvolvimento do trabalho independente que assegurem as condições prévias dos estudantes do 3º ano do Curso de Matemática na disciplina Equações Diferenciais com Derivadas Parciais do ISCED – Huambo, chegou-se as seguintes conclusões:

Vários são os esforços que estudantes que desde o surgimento do cálculo na antiga Grécia tem se empenhado na investigação neste campo. Com objectivo de elaborar a sistema de exercícios resolvidos e propostos para o desenvolvimento do trabalho independente que assegurem as condições prévias dos estudantes do 3º ano do Curso de Matemática na disciplina Equações Diferenciais com Derivadas Parciais. seleccionaram-se dois algoritmos simples de resolução dos mesmos: o método da traça da matriz dos coeficientes e o método dos operadores diferencias lineares, auxiliado pela regra de Cramer.

A proposta do sistema de exercícios resolvidos e propostos para o desenvolvimento do trabalho independente que assegurem as condições prévias dos estudantes do 3º ano do Curso de Matemática na disciplina Equações Diferenciais com Derivadas Parciais está composta por 24 exercícios resolvidos com indicações para sua resolução e 60 exercícios propostos, organizados do mais fácil ao mais complexo. Acreditamos que os mesmos contribuirão bastante para o melhoramento do trabalho independente dos estudantes do 3º ano do curso de Matemática do ISCED – Huambo e não só, na cadeira Equações Diferenciais com Derivadas Parciais, bem como enriquecerá a posteriores obras desenvolvidas neste campo científico.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ADAO, C. e BERNADINO, J. (2003). Blended-learning no Ensino de Engenharia: Um caso prático. Conferência CHALLENGES, **III Conferência Internacional sobre**

MORAN, J.M. (2007). Os novos espaços de atuação do professor com as tecnologias. IN:Anais do 12º Endipe – Encontro Nacional de Didática e Prática de Ensino, in ROMANOWSKI, Joana Paulin et al (Orgs).

MOREIRA, M. A. (1988). Mapas Conceituais e Aprendizagem Significativa (*Concept maps and meaningful learning*). Adaptado e atualizado, em 1997, de um trabalho com o mesmo título publicado em O ENSINO, Revista Galáico Portuguesa de Sócio-Pedagogia e Sócio-Lingüística, Pontevedra/Galícia/Espanha e Braga/Portugal, N° 23 a 28: 87-95. Publicado também em *Cadernos do Aplicação, 11*(2): 143-156, 1998.

NETO, A. C. C. e CASTANHO, M. J. P. (2008). Uso de um sistema baseado em regras fuzzy para avaliar a qualidade da cerâmica vermelha. In: **Revista Eletrônica Laton Sensu**, 2008. ISSN: 1980-6116.

PEGDEN, C. D,; SHANNON, R. E.; SADOWSKI, R. P. (1990). **Introduction to simulation using SIMAN**. McGraw-Hill, NY. 2 ed..

PELIZZARI, A.; KRIEGL, M.L.; BARON, M.P.; FINCK, N.T.L & DOROCINSKI, S.I. (2002). Teoria da Aprendizagem Significativa Segundo Ausubel. **Revista PEC**, Curitiba.,v. 2, n. 1.37-42 p. 2001/2002.

ALVES, B. (2005). Visualização Gráfica Via Web das Condições Meteorológicas Registradas em Plataformas de Coleta de Dados. Monografia de Especialização em Informática Empresarial. Guaratinguetá: Unesp.

ANDRADE, S., SILVA, G., SALES, D., AGUIAR, R., CARVALHO, C. (2006). Utilização do Software Maxima no Ensino do Cálculo Diferencial e Integral. In: Anais do VEncontro de Iniciação Científica da Universidade Severino Sombra. Vassouras: USS.

BRONSON, R. (1994). **Equações Diferénciais**. 2 Edição. Editora Afilada. ABDR. p. 546.

DE GUSMAN O. (1975). Miguel. **Equações diferenciais ordinárias**. Madrid: Editorial Alhambra, 1ª ed.,

DE GUSMAN O. M e RUBIO, B. (1979). **Integração: teoria y técnicas**. Madrid: Editorial Alhambra, 1ª ed.,.

LEANDRO H. (2007). **Comentários Metodológicos do Ensina da Matemática.** Cuba. Universidade de Ciego de Ávila. Conferência Magistral.

PIRES, C. M. C. (2000). **Currículos de matemática: da organização linear à ideia de rede**. São Paulo: FTD.

PUIG ADAM, P. (1975). **Curso teórico-prático de equações diferenciais**. Madrid: Biblioteca Matemática, 1ª ed.,.

SIMMONS, G. F. (1977). **Equações diferenciais, com aplicações y notas históricas**. México: McGraw-Hill, 1ª ed.,.

Estupiñan-Ricardo, J., & de Mora-Litardo, K. La influencia de la programación neurolingüística en estudiantes universitarios en la República de Ecuador The influence of neuro-linguistic programming in university students in the Republic of Ecuador.

Estupiñán Ricardo, J., Martínez Vásquez, Á. B., Acosta Herrera, R. A., Villacrés Álvarez, A. E., Escobar Jara, J. I., & Batista Hernández, N. (2018). Sistema de Gestión de la Educación Superior en Ecuador. Impacto en el Proceso de Aprendizaje. Dilemas Contemporáneos: Educación, Política y Valores.

Hernandez, N. B., Cueva, M. B. R., & Roca, B. N. M. Prospective analysis of public management scenarios modeled by the Fuzzy Delphi method.

Hernández, N. B., Izquierdo, N. V., Leyva-Vázquez, M., & Smarandache, F. (2018). Validation of the pedagogical strategy for the formation of the competence entrepreneurshipin high education through the use of neutrosophic logic and Iadov technique. Neutrosophic Sets & Systems, 23.

Hernandez, N. B., Luque, C. E. N., Segura, C. M. L., Lopez, M. d. J. R., Hungria, J. A. C., & Ricardo, J. E. (2019). LA TOMA DE DECISIONES EN LA INFORMATICA JURIDICA BASADO EN EL USO DE LOS SISTEMAS EXPERTOS. Investigación Operacional, 40(1), 131-140.