REVISTA PERTINENCIA ACADÉMICA
VICERRECTORADO ACADÉMICO ISSN 2588-1019

ESTUDO DE FUNÇÕES, FUNÇÃO QUADRÁTICA E SUAS DIFERENTES FORMAS

STUDY OF FUNCTIONS, QUADRATIC FUNCTION AND ITS DIFFERENT FORMS

https://doi.org/10.5281/zenodo.3338659

AUTOR: Calvino Paulo Capoco[1]

DIREÇÃO PARA A CORRESPONDÊNCIA: calvinopaulocapoco@hotmail.com

Data da receção:04 de Marzo de 2019

Data de aceitação:17 de Abril de 2019

Resumo

O presente estudo objetivou analisar o nível de conhecimento dos alunos do primeiro ano do curso de Matemática da Escola Superior Pedagógica do Bié, no que diz respeito ao estudo de funções reais de variável real. Portanto, procedeu-se à pesquisa bibliográfica para analisar o nível de conhecimento básico sobre funções reais, bem como, as habilidades e dificuldades de resolução dos problemas propostos. Desta pesquisa, foram extraídos resumos e referências de alguns autores indicados na bibliografia. O autor deste projeto encontrou na sua prática profissional uma grande debilidade por parte dos alunos da escola em referência quanto ao estudo de funções. Para a solução destas dificuldades lavrou-se a presente obra com definições, exemplos ilustrados, exercícios e teoremas demonstrados, que servirá de material de consulta tanto para os professores como para os alunos e poderá contribuir para a resolução do problema diagnosticado.

Palavras-chave: A Matemática no contexto cultural, Estudo de funções.

ABSTRACT

The present study aimed to analyze the level of knowledge of the first year students of the Bié Pedagogical Higher Education Mathematics course, regarding the study of real functions of real variables. Therefore, the bibliographic research was carried out to analyze the level of basic knowledge about real functions, as well as the skills and difficulties of solving the problems proposed. From this research, abstracts and references of some authors indicated in the bibliography were extracted. The author of this project found in his professional practice a great weakness on the part of the students of the school in

[1]Mestreem Matemática para Professores, com a categoria docente de AssistenteEstagiário. Escola Superior Pedagógica do Bié na República de Angola.

reference as far as the study of functions. In order to solve these difficulties, the present work was drawn up with definitions, illustrated examples, exercises and theorems demonstrated, which will serve as a reference material for both teachers and students and may contribute to the resolution of the problem diagnosed.

Keywords: Mathematics in the cultural context, Study of functions.

INTRODUÇÃO

O estudo do processo de ensino-aprendizagem da matemática é umaspetomuitointeressante para a Pedagogia, Didática e suasciências relacionadas, tendoemconta que na atualidade a educaçãodeve mudar e gerardesenvolvimento mediante a instrução na sala de aula e não se deve considerar umprocesso à margem da sociedade. Uma das tendênciasgeraismais difundidas hoje consiste na transmissão dos processos de pensamentopróprios da Matemática. A Matemática é sobretudo saber fazer, é umaciênciaem que a escolha informada de um método de ensino é fundamental para garantir a transmissão eficaz dos conteúdos científicos. Por isso se concede uma grande importânciaaoestudo das questões, em boa parte coincidentes com a psicologia cognitiva, que se referemaosprocessosmentais de resolução de problemas. Muitos dos problemas de aprendizagem existentes entre os estudantessãohoje explicados pela ausênciaou uso inadequado de métodos de estudo e pela inexistência de hábitos de trabalho que favoreçam a aprendizagem. Alemdisso, muitosalunosmanifestamatitudes negativas faceaoestudo, uma enorme desmotivação para as atividades escolares, dedicando-lhesmuitopouco tempo(Vázquez, Jara, Riofrio, & Teruel, 2018). Um dos problemas enfrentados pelo sistema de ensino Angolano, refere-se aobaixodesempenho dos alunos do ensino fundamental (secundário) em Matemática. O conhecimento matemático distingue-se de todos os outros saberes pelo seucaracter lógico. As suasdefiniçõessão claras e existemnum mundo coeso e que nemsempre é tangível. Mas os conceitos matemáticos estãointimamente relacionados com a vivência e a perceção das coisas. Para saber matemática é indispensávelconhecer as suasdefinições e resultados e saber utilizá-las adequadamente. Ao longo do estudo, cada vez sãonecessáriosmaisdefinições e resultados que sãoprovados utilizando outros resultados jáconhecidos. Por isso, não saber a tabuada dificulta ouimpossibilita o cálculo das operaçõescom números inteiros e depoisprejudicará a resolução de equações e mais tarde o estudo de funções. O objetivo destetrabalhonão consiste apenas emproporumareflexãodidática sobre os problemas de Ensino-Aprendizagem da Matemática, mas também desenvolver o tema matemático do Estudo de Funçõesnumaperspetivaconstrutivista da Matemática, respeitando o seu carácter lógico-dedutivo(Ricardo, Coloma, Maldonado, & Hurtado, 2018).

Com base na presente investigação surge a seguintequestão científica

O que está na base da poucaperceção das diferentes formas da equação do II grau?

DESENVOLVIMENTO

FUNÇÕES QUADRÁTICAS

Definição

Chama-se funçãoquadrática a umafunção real de variável real$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b,\ c \in \mathbb{R}$.

Proposição

Toda a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ pode ser definida pela expressão algébrica

$$f(x) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}]$$

Demonstração

Queremos mostrar que $ax^2 + bx + c = a[(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}]$

$$ax^2 + bx + c =$$

$$= a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$$

$$= a[x^2 + \frac{2b}{2a}x + (\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a}]$$

$$= a[(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}]$$

$$= a[(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}]$$

$$= a[(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}]$$

c.q.d

Fórmula resolvente

Uma aplicação particular desta Proposição é a determinação das raízes da função quadrática, ou seja, dos seus zeros. Assim:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2} = 0 \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2} \qquad (2)$$

$\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (3)

$\Leftrightarrow x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (4)

Em primeiro lugar a forma canónica ilustrada na Proposição anterior conduz imediatamente à formula que dá as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$. Com efeito, sendo $a \neq 0$, temos as seguintes equivalências

A passagem da linha (2) para a linha (3) só tem sentido quando o descriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\text{é } \Delta \geq 0.$$

Caso tenhamos $\Delta < 0$ a equivalência entre as linhas (1) e (2) significa que a equação dada não possui solução real, pois o quadrado de $x + \left(\frac{b}{2a}\right)$não pode ser negativo.

O método de completar o quadrado tem aplicações noutras questões matemáticas. Independente disto, é instrutivo fazer os alunos praticarem seu uso em exercícios concretos, para resolverem a equação do segundo grau sem aplicar diretamente a fórmula (4). Da fórmula (4) resulta imediatamente que, se o descriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ é positivo, a equação

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Tem duas raízes distintas

$$\propto = (\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a})$$

E

$$\beta = (\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a})$$

Com $\propto < \beta$, cuja soma é $s = -\frac{b}{a}$ e cujo produto é $p = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$.
Em particular, a média aritmética das raízes é $-\frac{b}{2a}$, ou seja, as raízes $\propto e\, \beta$ são equidistantes do ponto $-\frac{b}{2a}$.
Quando $\Delta = 0$, a equação dada possui uma única raiz, chama-se raiz dupla, igual a $-\frac{b}{2a}$, ou seja $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

Caso $a > 0$ a forma canónica

$$f(x) = ax^2 + bx + c \ = \ a[(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}]$$

exibe, no interior dos colchetes, uma soma duas parcelas. A primeira depende de x e é sempre ≥ 0 . A segunda é constante. O menor valor desta soma é atingido quando

$$(x + \frac{b}{2a})^2 \geq 0$$

Então

$$a[(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}] \geq 0 + a\,(\frac{4ac - b^2}{4a^2})$$

O valor mínimo é atingido se

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = 0$$

Ou seja, quando $x = -\frac{b}{2a}$.

Neste ponto, $f(x)$ também assume seu valor mínimo. Portanto, quando $a > 0$, é o valor mínimo assumido por

$f(x) = ax^2 + bx + c$ é

$$a\left(\frac{4ac - b^2}{4a^2}\right) = \frac{4a^2c - ab^2}{4a^2} = \frac{4a^2c}{4a^2} - \frac{ab^2}{4a^2}$$

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = c - (\frac{b^2}{4a})$$

$$= \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$$

Caso $a < 0$, o valor $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ é o maior dos números $f(x) \forall\, x \in \mathbb{R}$, ou seja o valor máximo de $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Quando $a > 0, f(x) = ax^2 + bx + c$ não assume valor máximo: é uma função ilimitada superiormente. Analogamente, quando $a < 0$, $f(x)$ não assume valor mínimo: é ilimitada inferiormente(Hernandez et al., 2019).

A função quadrática não é injetiva. Para que valores de $x_1 \neq x_2$ se obtém

$$f(x_1) = f(x_2)$$

Resposta: Para valores x_1, x_2 equidistantes de $-\frac{b}{2a}$, ou seja, $\frac{x_1+x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$.

Graficamente $x = -\frac{b}{2a}$ é o eixo de simetria do gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$.

$x = -\frac{b}{2a}$é abcissa do ponto onde $f(x)$ atinge um extremo:

Definição

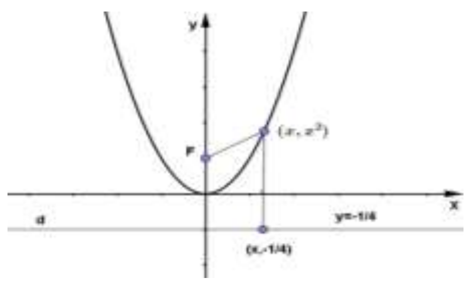
O gráfico de uma função quadrática chama-se parábola.

Teorema: O gráfico de uma função quadrática é uma parábola.

Demostração

1º) O gráfico de $f(x) = x^2$ é uma parábola com foco F = (0, $\frac{1}{4}$) e diretriz $y = -\frac{1}{4}$.
Com efeito, a distância de um ponto qualquer (x, x^2) do gráfico de $f(x) = x^2$ ao ponto $F = (0, \frac{1}{4})$ é igual a;

$$\sqrt{x^2 + (x^2 - \frac{1}{4})^2}$$



A distancia do mesmo ponto (x, x^2) à recta $y = -\frac{1}{4}$ é $x^2 + \frac{1}{4}$. Como se trata de números positivos para verificarmos a igualdade entre estas duas distâncias, basta ver que seus quadrados são iguais. E de facto tem-se:

$x^2 + (x^2 - \frac{1}{4})^2 = (x^2 + \frac{1}{4})^2$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, como se verifica facilmente:

$$x^2 + x^4 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{16} \;=\; x^4 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{16}$$

$$\frac{2x^2 - x^2}{2} = \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}$$

2º Se $a \neq 0$, o gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2$ é a parábola com foco $F = (0, \frac{1}{4a})$ e cuja diretriz é a recta horizontal $y = -\frac{1}{4a}$.
A fim de se convencer deste fato, basta verificar que, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, vale a igualdade

$$x^2 + (ax^2 - \tfrac{1}{4a})^2 = (ax^2 + \tfrac{1}{4a})^2,$$

$$x^2 + a^2x^4 - \frac{2ax^2}{4a} + \frac{1}{16a^2} \quad = a^2x^4 + \frac{2ax^2}{4a} + \frac{1}{16a^2}$$

$$x^2 - \frac{2ax^2}{4a} = \frac{2ax^2}{4a}$$

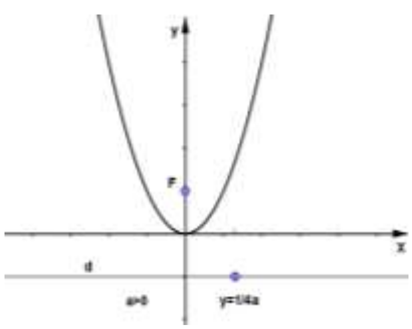
$$\frac{4ax^2 - 2ax^2}{4a} = \frac{2ax^2}{4a}$$

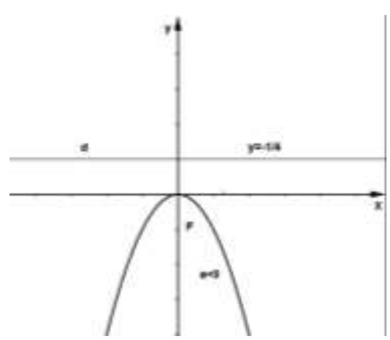
$$\frac{2ax^2}{4a} = \frac{2ax^2}{4a}$$

$$\frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}$$

Onde o primeiro membro é o quadrado da distancia do ponto genérico $P = (x, ax^2)$ do gráfico de $f(x) = ax^2$ ao foco $F = (0, \frac{1}{4a})$ e o segundo membro é o quadrado da distância do mesmo ponto P à reta $y = -\frac{1}{4a}$.

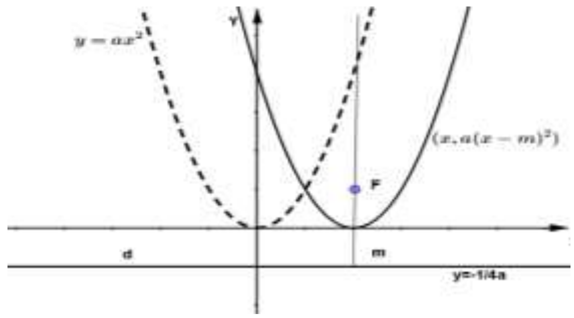
$$F = (0, \frac{1}{4a})$$





Se $a > 0$, a parábola $y = ax^2$ tem sua concavidade voltada para cima.
Se $a < 0$, a parábola $y = ax^2$ tem sua concavidade voltada para baixo.

3º Para todo $a \neq 0$ e todo $m \in \mathbb{R}$, o gráfico da função quadrática $f(x) = a(x-m)^2$ é uma parábola cujo foco é o ponto $F = (m, \frac{1}{4a})$ e cuja diretriz é a reta horizontal $y = -\frac{1}{4a}$.



Para se chegar a esta conclusão, tem-se duas opções. Ou se verifica que, para todo $x \in \mathbb{R}$, vale a igualdade

$$(x-m)^2 + [a(x-m)^2 - \frac{1}{4a}]^2 = [a(x-m)^2 + \frac{1}{4a}]^2$$

$$(x-m)^2 + [a(x-m)^2]^2 - \frac{2a(x-m)^2}{4a} + \frac{1}{16a^2} = [a(x-m)^2]^2 + \frac{2a(x-m)^2}{4a} + \frac{1}{16a^2}$$

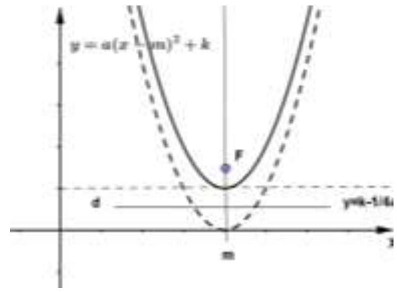
$$(x-m)^2 - \frac{2a(x-m)^2}{4a} = \frac{2a(x-m)^2}{4a}$$

$$\frac{2a(x-m)^2}{4a} = \frac{2a(x-m)^2}{4a}$$

$$\frac{(x-m)^2}{2a} = \frac{(x-m)^2}{2a}$$

Ou então observa-se simplesmente que o gráfico de $f(x) = a(x-m)^2$ resulta do gráfico de $g(x) = ax^2$ pela translação horizontal $(x, y) \to (x+m, y)$, a qual leva o eixo $x = 0$ no eixo $x = m$.

4º Dados $a, m, k \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, o gráfico da função quadrática $f(x) = a(x - m)^2 + k$ é a parábola cujo foco é o ponto $F = (m, k + \frac{1}{4a})$ e cuja diretriz é a reta horizontal $y = k - \frac{1}{4a}$.



$$F = (m, k + \frac{1}{4a})$$

A afirmação acima resulta imediatamente do exemplo anterior, levando em conta que o gráfico da função quadrática $f(x) = a(x - m)^2 + k$ é obtido do gráfico de $g(x) = a(x - m)^2$ por meio da translação vertical $(x, y) \rightarrow (x, y + k)$, que leva o eixo OX na reta $y = k$ e a reta $y = -\frac{1}{4a}$na reta $y = k - \frac{1}{4a}$.

Mais geralmente, para qualquer $f(x) = ax^2 + bx + c$

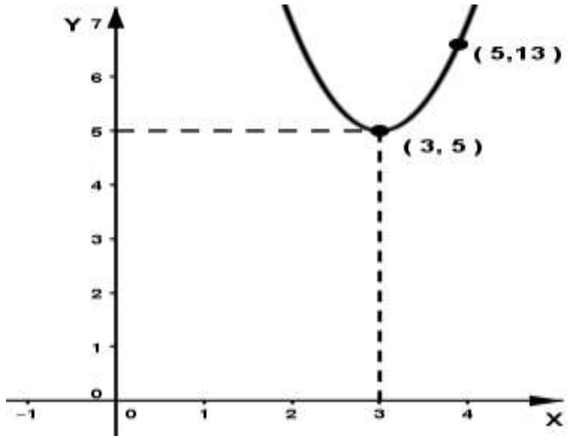
Vimos na proposição que $f(x) = a(x - m)^2 + k$, com

$$m = -\frac{b}{2a} \quad \text{e} \quad k = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

O que corresponde graficamente a uma translação horizontal $a\, por\, m$ seguida de uma translação vertical por k.
Logo, toda a função quadrática é representada graficamente por uma parábola. C.q.d

Reciprocamente, usemos o próximo exemplo para mostrar que dada uma parábola, identificar a função quadrática representada.

Exercício 1: Encontrar a função quadrática cujo gráfico é dado na figura abaixo.



Solução:

$$f(x) = a(x - m)^2 + k$$

Da representação gráfica temos:

Translação horizontal por $m = 3$ e Translação vertical por $k = 5$

$$f(x) = a\,(x - 3)^2 + 5$$

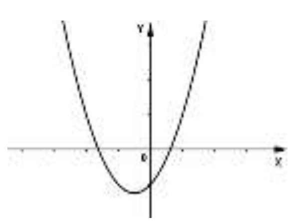
$$f(3) = 5 \qquad\qquad f(5) = a\,(5 - 3)^2 + 5$$

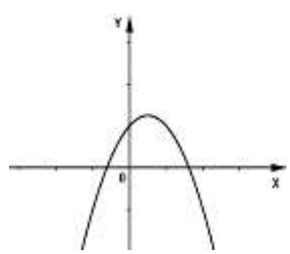
$$f(5) = 13 \qquad 13 = a\,(5 - 3)^2 + 5$$

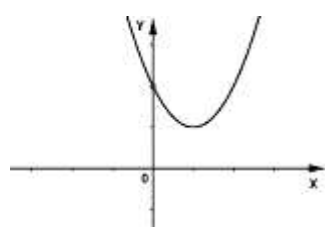
Então $\quad a = 2$

Logo a função quadrática é $f(x) = 2(x - 3)^2 + 5$
c.q.d

Exercício 2: Identificar os sinais de a, b e c nos gráficos de funções quadráticas $f(x) = ax^2 + bx + c$ dados abaixo:







Solução:
O sinal de a é obtido em função do sentido da parábola;
O sinal de b é obtido em função da posição do eixo de simetria $x = -\frac{b}{2a}$

A imagem c é obtida calculando $f(0)$, ou seja, é o ponto de interseção com o eixo dos y.

Na figura 1 temos: $a > 0,\ b > 0\ e\ c < 0$;

Na figura 2 temos: $a < 0,\ b < 0\ e\ c > 0$;

Na figura 3 temos: $a > 0, b < 0\ e\ c > 0$.

Exercício 3. Escrever cada uma das funções quadráticas abaixo na forma $f(x) = a(x - m)^2 + k$. A seguir, calcule suas raízes (se existirem), o eixo de simetria de seu gráfico e seu valor mínimo ou máximo.

a) $f(x) = x^2 - 8x + 23$

b) $f(x) = 8x - 2x^2$

Solução a)

$$m = -\frac{b}{2a} \qquad e \qquad k = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$m = 4 \qquad e \qquad k = 7$$

Substituindo em $f(x) = a(x - m)^2 + k$, vem :

$$f(x) = (x - 4)^2 + 7 \qquad c.q.d$$

Raízes

a) $f(x) = x^2 - 8x + 23$

$$a = 1, b = -8\ e\ c = 23$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-8)^2 - 4.1.23$$

$$\Delta = -28$$

Logo a função não tem raízes reais. O seu valor mínimo é

$f(x) = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{28}{4.1} =$ 7

Eixo de simetria:

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{8}{2} = 4$$

b) $f(x) = 8x - 2x^2$

$$m = 2 \quad e \quad k = 8$$

Substituindo em $f(x) = a(x-m)^2 + k$, vem:

$$f(x) = -2(x-2)^2 + 8 \qquad c.q.d$$

Raízes

b) $f(x) = 8x - 2x^2$

$$2x(4-x) = 0$$
$$2x = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$4 - x = 0$$

$$-x = -4/(-1)$$

$$x_2 = 4$$

Eixo de simetria:

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{-8}{-2.2} = 2$$

Valor mínimo:

$$f(x) = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-64}{4.(-2)} = 8$$

Exemplo: Calcular as raízes da equação dada por$x^2 + 5x + 6 = 0$

Solução:

$$a = 1, b = -5 \; e \; c = 6$$
$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = (-5)^2 - 4.1.6$$
$$\Delta = 25 - 24$$
$$\Delta = 1$$

$\Delta > 0$. Logo a equação tem raízes distintas. Ou seja $x_1 \neq x_2$.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2.1} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

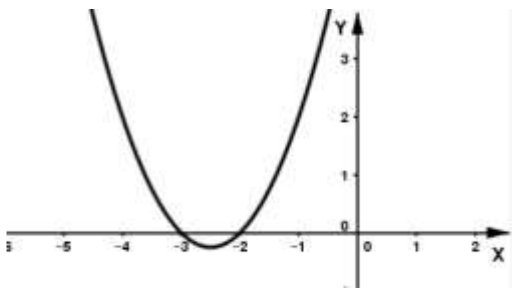
$$x_1 = 3$$

$$x_2 = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_2 = 2$$

Logo $x_1 \neq x_2$. Ou seja 3 ≠ 2.

Representação Gráfica:



Conclusão

O processo de ensino aprendizagem constitui a viamediatizadoraessencial para a apropriação de conhecimentos, habilidades, hábitos e normas, comportamentos e valores ligados pela humanidade, que se expressam no conteúdo de ensino, emestreito vínculo com o resto das atividades docentes e extra docentes que realizam os estudantes (Zilberstein, 1999). Neste contexto e depois de umainegável e inesgotávelinvestigação sobre questões pertinentes e tendoemconta os objstivos preconizados, conclui-se o seguinte:

Apresentam-se dificuldades por parte dos alunosemtrabalharcomfunções;

Analisamos e verificamos os erros e dificuldades que os alunosenfrentamao resolver problemas sobre o estudo de funções;

Propusemosexercíciosresolvidosnasmais diferentes formas de umaequaçãoquadrárica, e que tais formas possam elevar a capacidade de síntese e de técnicas de resolução.

Bibliografia

Kline, M. (1967). Mathematics for Nonmathematician. New York: Dover PublicationsInc.
Assembleia Nacional da República de Angola (2001). Lei de bases do sistema de Educação. Lei 13/01. Angola: Imprensa Nacional.
Lima, Carvalho, Wagner, & Morgado (2006). Matemática do Ensino Médio, Volume1, SBM, coleção Professor de Matemática.
Stewart, J.(2003). Calculo Volume I – 5ª Edição. Brasil: Thomson
Exercícios resolvidos Matemática 12 ano I Volume
Tizziote, José Guilherme, (1976) Matemática II grau, Volume III.
Hernandez, N. B., Luque, C. E. N., Segura, C. M. L., Lopez, M. d. J. R., Hungria, J. A. C., & Ricardo, J. E. (2019). LA TOMA DE DECISIONES EN LA INFORMATICA JURIDICA BASADO EN EL USO DE LOS SISTEMAS EXPERTOS. Investigación Operacional, 40(1), 131-140.
Ricardo, J. E., Coloma, M. A. V., Maldonado, A. T. C., & Hurtado, L. A. C. (2018). Reflexiones acerca de la pertinencia e impacto de la educación superior en Ecuador desde su perspectiva actual. Open Journal Systems en Revista: REVISTA DE ENTRENAMIENTO, 3(3), 81-92.
Vázquez, M. L., Jara, R. E., Riofrio, C. E., & Teruel, K. P. (2018). Facebook como herramienta para el aprendizaje colaborativo de la inteligencia artificial. Didasc@ lia: Didáctica y Educación, 9(1), 27-36.