



## EL DESARROLLO DE HABILIDADES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS TRIGONOMÉTRICOS DE LOS ESTUDIANTES DE SEGUNDO CICLO DE LA ENSEÑANZA SECUNDARIA ANGOLEÑA

### DEVELOPING SKILLS TO SOLVE TRIGONOMETRICAL PROBLEMS IN STUDENTS OF SECOND CYCLE OF THE ANGOLAN SECONDARY EDUCATION

AUTORES: José David Chico<sup>1</sup>

Michel Enrique Gamboa Graus<sup>2</sup>

Luis Zaldívar Henríquez<sup>3</sup>

DIRECCIÓN PARA CORRESPONDENCIA: [michelgamboagraus@gmail.com](mailto:michelgamboagraus@gmail.com)

Fecha de recepción: 27-05-2017

Fecha de aceptación: 21-07-2017

#### RESUMEN

En este artículo se emprende el tratamiento a las habilidades para la resolución de problemas trigonométricos con estudiantes de segundo ciclo de la enseñanza secundaria angoleña. Esto se hace a partir del estado real y potencial de los alumnos de oncenso grado de la Escuela Secundaria 4 de Abril en Caála, Huambo, una de las provincias angoleñas, que limitan el rendimiento académico en la asignatura Matemática. La esencia radica en la propuesta de un sistema de problemas organizados en tres tipos que propicia el aumento gradual del grado de dificultad, como condición necesaria para la formación sistemática de habilidades y para asegurar que los estudiantes logren buenos resultados y sientan satisfacción por ello. Igualmente se presentan consideraciones teóricas que sustentan la propuesta, ejemplos de ejercicios e indicaciones para implementarlos. Además, se presenta un análisis de la pertinencia y factibilidad de la alternativa propuesta, que muestra las posibilidades reales de generalización en la Enseñanza Secundaria angoleña.

<sup>1</sup> Licenciado en Educación, con especialidad en Matemática. Master en Didáctica de la Educación Superior y profesor de Matemática de la escuela de Enseñanza Secundaria de II Ciclo, 4 de Abril en Caála, Huambo, Angola. E-mail: [jose.david.chico.jdc@gmail.com](mailto:jose.david.chico.jdc@gmail.com)

<sup>2</sup> Licenciado en Educación, con especialidad en Matemática-Computación. Doctor en Ciencias Pedagógicas y Profesor Titular del Centro de Estudios de Pedagogía de la Universidad de Las Tunas (CEPUT).

<sup>3</sup> Licenciado en Educación, con especialidad en Matemática-Computación. Doctor en Ciencias Pedagógicas. Profesor Titular de la Universidad de Las Tunas. E-mail: [luiszhcuba@gmail.com](mailto:luiszhcuba@gmail.com)

**PALABRAS CLAVE:** Matemática; resolución de problemas; trigonometría.

**ABSTRACT**

This article deals with the development of skills to solve trigonometrical problems in students through the teaching-learning process of Mathematics in the second cycle of the Angolan Secondary Education. This is done from the actual and potential status of eleventh graders from the school 4 de Abril en Caála, Huambo, one of the Angolan provinces, that limit academic achievement in that subject. The essence lies in a system of problems organized in three types which favors the gradual increase of the level of difficulty, as a necessary condition for the systematic formation of skills and to assure that the students achieve good results. Equally theoretical considerations underlying the proposal, examples of exercises and recommendations to implement them are presented. In addition, it is presented an analysis of the relevance and feasibility of the proposed teaching alternative, which shows the real possibilities of generalization in Angolan Secondary Education.

**KEYWORDS:** Mathematics; problem solving; trigonometry.

**INTRODUCCIÓN**

El desarrollo de la educación es notable actualmente en Angola. El gobierno ha invertido gran cantidad de recursos en la construcción y reparación de nuevas escuelas, principalmente de la enseñanza de secundaria de la escuela de I y II ciclo. Igualmente se ha potenciado la preparación de los docentes, para que estos puedan satisfacer las demandas que la sociedad plantea en relación con la formación de las nuevas generaciones de angoleños.

En tal sentido se considera que las asignaturas básicas, y dentro de ellas la Matemática por lo que aporta su aprendizaje al desarrollo del pensamiento lógico y a la resolución de ejercicios y problemas, desempeñan un papel muy importante en la formación de los adolescentes. Estos aspectos son de vital importancia para la formación del individuo como ser social. Los estudiantes experimentan diariamente la utilidad de la Matemática en el mundo que les rodea.

En Angola, según M. Bemba, (2012) la enseñanza de la Matemática es reconocida como uno de los grandes problemas actuales de la educación en todos los niveles. Por eso es preocupación del gobierno angoleño y del Ministerio de Educación, mejorar la calidad de la enseñanza en lo general y en particular de la enseñanza de la Matemática.

Un número significativo de los profesores angoleños practican una enseñanza de Matemática basada en el tradicionalismo, memorística. Estos optan por la realización de ejercicios rutinarios, que obligan al estudiante utilizar la memoria para la

repetición de pasos y no al desarrollo en él de un pensamiento reflexivo, lógico y divergente. Esto repercute en que se resienta la preocupación de presentar a los estudiantes ejercicios con carácter de problemas, en la que para su solución no se conoce un procedimiento algorítmico.

La Matemática es una de las ciencias de mayor influencia en la formación del pensamiento lógico, su aprendizaje pone en evidencia la capacidad intelectual y el aprovechamiento del estudiante en su vinculación con la vida. Sin embargo, es vista por estudiantes angoleños como solo una asignatura difícil. Esto incide en las grandes dificultades que estos presentan en su aprendizaje.

En el escenario actual de la enseñanza de la Matemática en Angola se reconoce la necesidad de propiciar que los estudiantes se apropien de procedimientos heurísticos que les permitan enfrentar sus vidas con éxito. No obstante, estos aprenden a resolver ejercicios y problemas por imitación, al ver al profesor u otro estudiante solucionarlos. Es necesario alcanzar una enseñanza que prepare a los estudiantes a pensar por sí mismos, a esforzarse, a buscar argumentos, conjeturas, a dar solución de las situaciones que se presentan, para que de esta manera haya una apropiación consciente y una internalización adecuada de lo que se aprende.

Estudios realizados por profesores de Matemática angoleños, en la Enseñanza Secundaria como Bemba M, (2012), H. Sakala (2014), M. Cipriano (2014) y J. Dinis (2014) entre otros, señalan que en Angola se reconoce socialmente que es necesario un conocimiento básico de esta ciencia para desenvolverse con eficacia en las situaciones cotidianas, pero que como regularidad no es recibida con satisfacción por los estudiantes. Esto trae como resultado la insuficiente motivación para aprender Matemática.

Estudios realizados por estos autores señalan que el proceso de enseñanza-aprendizaje de temas como la Aritmética, Geometría y Álgebra, han sido muy privilegiados en el nivel secundario de II Ciclo. El tema de la Trigonometría y dentro de este el tratamiento de las razones trigonométricas, no se le ha dado el tiempo suficiente para su desarrollo por parte de los estudiantes. Como consecuencia, muchos estudiantes pierden interés hacia los contenidos de trigonometría, y los docentes aún no tienen la preparación necesaria para asumir con calidad su enseñanza. Estas circunstancias traen como consecuencia un elevado número de fracasos escolares.

Con la aplicación práctica de varios instrumentos investigativos se pudo constatar que los estudiantes de segundo ciclo de la enseñanza secundaria angoleña presentan disímiles insuficiencias en la resolución de problemas trigonométricos, entre las principales se encuentran las siguientes:

- Insuficiente preparación para aplicar los conocimientos sobre razones trigonométricas a problemas de manera independiente.

- Abandonan la resolución de problemas trigonométricos al tener dificultades para determinar correctamente acciones en un plan de solución.
- Son insuficientes las fuentes y materiales didácticos existentes de problemas trigonométricos vinculados a la realidad angolense, lo que limita el desarrollo de habilidades en el proceso de enseñanza aprendizaje.
- Manifiestan escasa motivación por el estudio de la trigonometría.

Como consecuencia, se persigue mostrar un sistema de ejercicios relacionados con el aprendizaje de la trigonometría, defendiendo la idea que esto contribuye a que los estudiantes de segundo ciclo de la enseñanza secundaria angolense desarrollen habilidades para resolver problemas trigonométricos y eleven el rendimiento académico en Matemática. En este artículo se presenta, entonces, la interpretación de su marco teórico-conceptual, la caracterización de la problemática en los estudiantes del onceno grado de la Escuela Secundaria de II Ciclo, 4 de abril en Caála, Huambo, Angola, así como la justificación y fundamentación de la necesidad de su transformación. Posteriormente, se muestra la argumentación del aporte esencial y su evaluación respectivamente.

## DESARROLLO

Como parte de la tesis en opción al título académico de Máster en Didáctica de la Educación Superior de J. D. Chico (2016) se hizo un análisis de la situación inicial de la problemática que aquí se presenta. Esto permitió caracterizar y constatar las dificultades en el desarrollo de habilidades para la resolución de problemas trigonométricos y su influencia en el rendimiento académico en la asignatura de Matemática de los estudiantes del II Ciclo de la Enseñanza Secundaria angolense. Esto justificó la elaboración de una alternativa didáctica para el desarrollo de habilidades para resolver este tipo de problemas matemáticos.

### 1. Consideraciones iniciales

La Matemática integra métodos, técnicas y procedimientos que posibilitan la resolución de problemas no solo asociados a habilidades específicas, sino a la formación y desarrollo de habilidades que permitan al estudiante generalizar, integrar y sistematizar sus conocimientos. Juega un papel esencial en el desarrollo de los procesos de pensamiento, constituye una de las prioridades en la formación de la personalidad de los estudiantes, su enseñanza debe contribuir con los métodos y principios de trabajo utilizados, en la formación y educación de los estudiantes para poder desarrollar en ellos la independencia, la autonomía, la responsabilidad y la laboriosidad de una forma consciente.

La enseñanza de esta asignatura debe dotar a los estudiantes de los conocimientos básicos para la resolución de ejercicios y problemas,

a través del planteamiento de situaciones de la vida cotidiana. De esta manera, la resolución de ejercicios y problemas es un proceso de aplicación de los conocimientos adquiridos por los estudiantes a nuevas situaciones.

La Enseñanza Secundaria de II ciclo, tiene como función social en Angola proporcionar a los estudiantes los conocimientos necesarios y con la calidad requerida, para que desarrollen sus capacidades, aptitudes y puedan promover una cultura de valores para la vida social y productiva que el país exige.

Los estudiantes, y específicamente los del nivel secundario de II ciclo, deben saber comunicarse y comunicarse matemáticamente. Al respecto necesitan entender las ideas para luego poderlas expresar en el discurso, la escritura, mediante gráficos, diagramas u otros. Según S. Sampedro (2011) durante las clases los estudiantes deben ser estimulados por el profesor para que se establezcan las relaciones entre profesor-estudiante, estudiante-estudiante, estudiante-contenido y estudiante-fuente de conocimiento, que les permita constantemente la discusión y la crítica, para de esa manera desarrollar la capacidad de poder expresarse oralmente, con seguridad y fluidez.

El propio carácter de la función social de la Enseñanza Secundaria de II ciclo, impone el alcance de metas más exigentes en el desarrollo científico-técnico de los programas y contenidos, y tener en cuenta el contexto de los estudiantes.

Según aparece en el documento legal de la Reforma Curricular para la Enseñanza Secundaria de segundo ciclo, los objetivos de la misma son:

- Consolidar y alargar los conocimientos y capacidades adquiridas durante la Enseñanza Primaria y Secundaria.
- Contribuir para la creación de condiciones científicas e intelectuales, necesarias para la educación superior.
- Introducir intensamente en los estudiantes los métodos para el pensamiento en el trabajo científico.
- Apreciar la contribución de la Matemática en la evolución científica.
- Perfeccionar las capacidades de definir, demostrar, reconocer y sistematizar problemas matemáticos.
- Usar correctamente el vocabulario matemático.
- Crear las bases para el hábito de investigación científica.

La enseñanza de la Trigonometría en el nivel de secundaria de II ciclo tiene como objetivos:

- Ampliar los conocimientos sobre ángulos y medida de ángulos.
- Conocer las razones trigonométricas de ángulos agudos en un triángulo rectángulo.

- Resolver problemas de aplicación a la vida de razones trigonométricas de ángulos agudos en un triángulo rectángulo.
- Conocer las formulas trigonométricas fundamentales.
- Demostrar identidades al aplicar las formulas trigonométricas fundamentales.
- Conocer la función trigonométrica  $y = asenbx$  , su gráfico y propiedades.
- Conocer la función trigonométrica  $y = acosbx$  , su gráfico y propiedades.
- Conocer las funciones trigonométricas  $y = tanx$  ,  $y = cotx$  su gráfico y propiedades.
- Conocer las ecuaciones trigonométricas.
- Resolver ecuaciones trigonométricas.

Una escuela de excelencia es aquella en la que se ofrece calidad en cada uno de los productos y servicios que presta, principalmente los servicios que están dirigidos a los estudiantes. En esta se deben satisfacer las necesidades siempre crecientes de la sociedad, con el objetivo de la formación de las nuevas generaciones.

El segundo ciclo de la Enseñanza Secundaria en Angola abarca décimo, oncen y duodécimo grados, con un conjunto de disciplinas que constan en el plan de estudios. En este segundo ciclo se profundiza en los conocimientos y en las habilidades adquiridas en el nivel anterior.

El estudio realizado en estudiantes de este nivel de enseñanza angoleño J. D. Chico (2016) revela las insuficiencias y potencialidades más significativas en el aprendizaje de la Matemática y específicamente lo relativo al tema de Trigonometría. Como parte de este estudio se pudo constatar que el desarrollo de habilidades en la resolución de problemas trigonométricos está limitado por la carencia de materiales básicos para la docencia, en los que el docente pueda acceder a ejercicios y problemas variados, y en forma de sistema. Esto justificó la elaboración de un cuaderno de ejercicios que fue la base de este artículo que aquí se presenta.

Este estudio permitió revelar que los estudiantes angoleños, al enfrentar los problemas trigonométricos, deben ser capaces de aplicar determinadas habilidades, con un determinado nivel de profundidad para lograr la integración adecuada de las operaciones que la conforman, lo que evidenciaría haber logrado al menos el nivel productivo. Sin embargo luego de la aplicación de diferentes instrumentos de investigación como la observación de clases, las encuestas a profesores y estudiantes, se pudo constatar que la mayoría de los estudiantes solo alcanzó un nivel reproductivo y en contados casos un nivel reproductivo con algunas variantes.

Al respecto, se pudo apreciar, tabla 1 y figura 1, la tendencia de los indicadores utilizados hacia un nivel bajo de los conocimientos, la motivación y la independencia de los estudiantes para resolver problemas trigonométricos. Esto se tradujo en bajo rendimiento académico de los mismos en esta temática.

Tabla 1: Resultados de los indicadores en la indagación empírica.

Indicadores	Alto		Medio		Bajo	
	Cantidad	%	Cantidad	%	Cantidad	%
Nivel de conocimientos que poseen los estudiantes acerca de los contenidos de las razones trigonométricas	13	9,3	41	29,3	86	61,4
Nivel de motivación que presentan los estudiantes para resolver problemas trigonométricos	11	7,9	39	27,9	90	64,3
Nivel de independencia de los estudiantes para resolver problemas trigonométricos	15	10,7	46	32,9	79	56,4

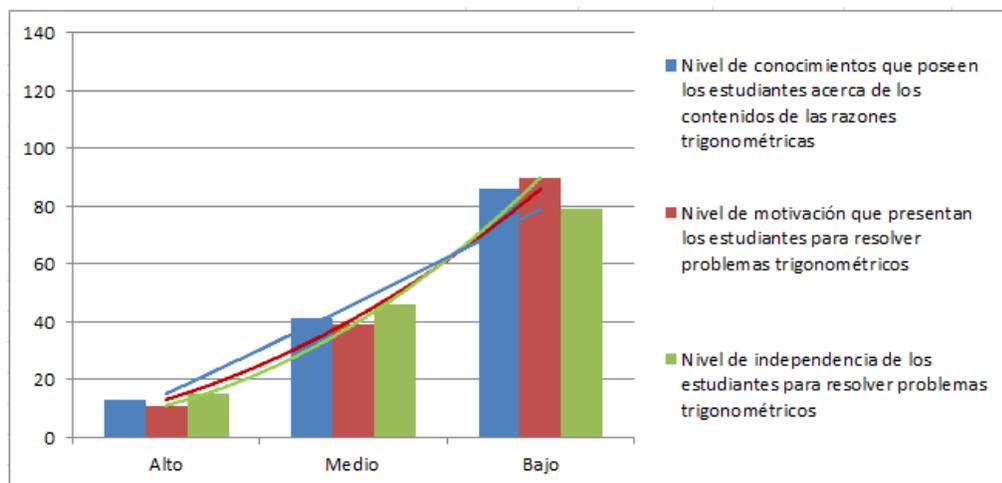


Figura 1: Resultados de los indicadores en la indagación empírica

## 2. Consideraciones teóricas

Los fundamentos teóricos de la propuesta que aquí se presenta están esencialmente en las ideas, regularidades y premisas

teóricas de la resolución de problemas definidos principalmente por Polya, G. (1953) y M. Guzmán (1991). Se asume además, la relación de la metacognición con la resolución de problemas de F. González (1996) y C. Silva (1999), los principios heurísticos, las reglas heurísticas y el programa heurístico general para la resolución de problemas matemáticos en general S. Ballester y otros (1992).

Asimismo, se consideran los principales resultados relacionados con la resolución de problemas matemáticos de autores como: L. Rico (1998), H. Hernández (1992), A. Schoenfeld (1983), L. Santos (1993), Campistrus, L y Rizo, C. (1996).

La insuficiente sistematización en la formación y desarrollo de habilidades para la resolución de problemas es actualmente en muchos países del mundo, y particularmente en Angola, un fenómeno complejo. Al respecto, los diferentes elementos didácticos resultan básicos, pues de ellos depende en gran medida la posibilidad de dar solución a las dificultades presentes en los estudiantes.

Para favorecer el rendimiento académico en la resolución de problemas matemáticos se requiere la formación y desarrollo de capacidades y habilidades cognitivas. Entonces, se precisa perfeccionar el diseño de los problemas que el profesor presenta a los estudiantes en cada una de las clases, donde tiene en cuenta las habilidades que se pretende formar y desarrollar. Para el logro de este objetivo se precisa del empleo de métodos activos de enseñanza.

El cuaderno de que se presentó en J. D. Chico (2016), con problemas relativos al tema de las razones trigonométricas de ángulos agudos, como base de este trabajo expone sus puntos de vista para su estructuración. Esto se hace a partir de proyectar la estructura funcional de una habilidad, que consiste en:

- Descomponer la habilidad en sus operaciones constituyentes, con el requisito de que cada una de ellas tenga identidad propia, esto significa, que contenga la acción precisa para el estudiante en cada momento.
- Prever las tareas mediante la cuales se cumplen las operaciones, de manera que orienten al estudiante en la ejecución de cada operación.
- Organizar el proceso de enseñanza-aprendizaje a nivel de unidad didáctica, de manera que el objeto u objetos sobre los cuales actúa la disciplina se enriquezca, aumente gradualmente su nivel de profundidad y propicie un incremento en el nivel de asimilación del alumno.

La estructura funcional de una habilidad puede representarse gráficamente como una sucesión temporal de las operaciones que componen las habilidades (horizontalmente) y su nivel de sistematización (verticalmente), dado por el número de tareas que

el estudiante debe cumplir para ejecutar cada operación, como se indica en la tabla 2.

Tabla 2: Estructura funcional de una habilidad.

OPERACIONES	Operación	Operación	.....	Operación
SITEMATIZACION	1	2		n
Etapa 1	Tarea	Tarea	.....	Tarea
	Tarea	Tarea	.....	Tarea
	Tarea	Tarea	.....	Tarea
Etapa 2	Tarea	Tarea	.....	Tarea
	Tarea	Tarea	.....	Tarea
	Tarea	Tarea	.....	Tarea
Etapa 3	Tarea	Tarea	.....	Tarea
	Tarea	Tarea	.....	Tarea
	Tarea	Tarea	.....	Tarea
PROBLEMA PROPIO				

En el proceso de asimilación de una habilidad, según U. Mestre (1996), se establecen diferentes etapas. Estas están caracterizadas cada una por un grado de independencia cada vez mayor del estudiante respecto su dependencia del profesor, a medida que el objeto estudiado se hace más rico, hasta el límite establecido por el grado de dificultad declarado en el objetivo de la unidad didáctica, el cual determina las características del denominado problema propio y se identifica con el máximo dominio y sistematicidad previsto. Este constituye una generalización de los problemas docentes, en el que se recoge la complejidad del contenido de la unidad, en cuanto a conocimiento, habilidades y actitudes, además de que en él se generaliza el método de resolución.

Este mismo autor U. Mestre (2001), señala que en cada unidad didáctica se produce un incremento cuantitativo de la complejidad del objeto de estudio, ya que el número de tareas que el estudiante debe cumplimentar para ejecutar cada operación va en aumento hasta cumplir las exigencias del problema propio.

El proceso de sistematización de una determinada habilidad, en general, no termina en la unidad dada. Al ser esta retomada en la unidad posterior, donde el objeto de estudio se ha enriquecido aún más hasta sufrir un cambio cualitativo, se repite un proceso similar a partir del nivel de sistematización precedente. Así se transita por estadios de compilación paulatina del objeto en un proceso de asimilación que lleva al estudiante a un nuevo y más elevado nivel de sistematización.

De tal modo, en la integración de las diferentes unidades temáticas, se logra la formación de las habilidades con un alto nivel de sistematización. Es preciso señalar que solo con el

enfrentamiento a situaciones nuevas no se pueden garantizar los niveles de dominio deseado. Es necesaria la posterior ejercitación, a lo largo de la cual se hacen más precisas y menos desplegadas las operaciones.

Con la ejercitación de los contenidos se alcanza un determinado nivel de dominio, que es transferido durante el enfrentamiento a cada nueva situación cada vez más compleja que la anterior y por tanto, resulta más insuficiente para resolverla. Esta contradicción esencial permite dar un salto cualitativo en la sistematización de los contenidos y deviene en la fuerza motriz del desarrollo de las capacidades cognitivas del estudiante. Es necesario trabajar con un mínimo de tareas que son imprescindibles para realizar la operación, lo que constituye el nivel de sistematización básico.

La sistematización es una relación ascendente entre el nivel de profundidad, que se revela en el objeto y el nivel de asimilación del sujeto. Un incremento de la complejidad del objeto, de su riqueza, irá acompañado de un aumento de los componentes de la habilidad, de la profundidad del análisis, con lo que se requiriere de mayor precisión en las operaciones. En correspondencia, el sujeto se verá obligado ante el enfrentamiento de nuevos problemas a dar saltos cualitativos en su proceso de asimilación.

En el proceso de asimilación, según U. Mestre (1996), se establecen etapas caracterizadas por un grado de independencia cognoscitiva cada vez mayor en los estudiantes respecto al docente. Esto ocurre a medida que el objeto estudiado incrementa el nivel de profundidad declarado en el objetivo de cada unidad didáctica, lo cual determina las características del llamado problema propio.

Según la concepción de los autores, la familia de problemas debe presentar la siguiente estructura organizativa:

Problemas tipo I: Constituyen situaciones particulares muy simples, con un mínimo de complejidad y riqueza en el objeto, con los que se familiariza el estudiante al aplicar el método de solución con la ayuda del profesor.

Ejemplo: Indique en el sistema circular la amplitud del ángulo  $315^\circ$ .

Con este ejercicio se persigue que los estudiantes consigan las siguientes habilidades: En un nivel de familiarización, consiste en determinar los indicadores de primer orden la idea general que trata (sujeto). Acción identificar: que debe establecer el sistema circular para representar el ángulo  $315^\circ$ . Observar el número que representa el ángulo, ver en qué cuadrante se encuentra. Determinar el cuadrante, ver la ubicación del ángulo, reconocer propiedades, esbozar e interpretar.

Como las unidades son directamente proporcionales:

$$x = \frac{315^\circ \pi}{180^\circ} \rightarrow x = \frac{7\pi}{4} \text{ Luego: } 315^\circ = \frac{7\pi}{4}$$

Problemas tipo II: Constituyen situaciones conocidas, pero, con variantes de un grado de complejidad mayor en el objeto, dado por la introducción gradual de algunos elementos y condiciones y en los cuales el estudiante se ve obligado no solo a actuar de manera reproductiva, sino con cierto grado de productividad y profundización. Aquí, para elevar la efectividad, se debe tratar de minimizar la ayuda del profesor.

Ejemplo: Determine el lado extremo del ángulo de  $860^\circ$ .

Procedimiento: Se divide  $860^\circ$  por  $360^\circ$ . El cociente indica la cantidad de vueltas, en tanto que el resto de esta división indicará el lado extremo menor que  $360^\circ$ , y el cuadrante al que pertenece tal número. Así  $860^\circ = 140 + 2(360)$ . Luego, el ángulo de  $860^\circ$  da dos vueltas en el sentido contrario a las manecillas del reloj. El extremo es  $140^\circ$  y pertenece al segundo cuadrante.

Problemas tipo III: Constituyen situaciones con el máximo grado de dificultad del objeto, a través de las cuales se generaliza el método de trabajo empleado y que permiten, una vez realizadas por el estudiante, controlar el grado y el dominio alcanzado en la habilidad. Aquí se recomienda minimizar aún más la ayuda del profesor para elevar su efecto.

Para lograr una organización más eficiente del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática y específicamente para lograr los objetivos propuestos en este trabajo se proponen las siguientes orientaciones:

- Reducir el tiempo dedicado a la exposición de contenidos teóricos y aumentar el tiempo a las actividades prácticas, como son las clases de ejercitación y sistematización.
- Utilizar métodos productivos de enseñanza para la impartición de clases, en los cuales este presente la resolución de problemas trigonométricos.
- Incentivar la participación activa de los estudiantes, a través de la utilización de diferentes formas de docencia.
- Cada una de las formas de docencia utilizadas por el profesor, con independencia de sus propósitos, debe buscar garantizar un proceso didáctico que promueva el ejercicio de la comunicación, la interacción y la crítica sobre las propias soluciones, como condición necesaria para un aprendizaje desarrollador.
- Los nuevos contenidos deben ser introducidos a través de situaciones problémicas, utilizar vías como preguntas, demostraciones de hechos, planteamiento de hipótesis, elaboración de conjeturas, formulación de conclusiones, entre otras.

En clases de ejercicios el estudiante se comienza a familiarizar con los métodos de solución. Se sugiere que esta se realice en forma problemática, siempre que el contenido lo permita. Se debe comenzar por problemas más sencillos e ir incrementando la complejidad. Esto posibilita un aumento gradual de la participación activa de los estudiantes en la clase. Presentar un problema muy complejo conduce a la decepción de los estudiantes.

Con esta concepción de la clase de ejercicios se posibilita el inicio de la construcción por parte de los estudiantes, del método de resolución de problemas. Este proceso continuo en las siguientes clases prácticas a través de las cuales el estudiante generaliza el método de trabajo, se aplica de forma cada vez más consciente la habilidad en formación. Al terminar cada clase el profesor debe orientar la realización de otros ejercicios en correspondencia con el tipo de problema ilustrado, con el objetivo de que el estudiante se entrene y llegue a dominar, a este nivel el método de solución.

Una vez resueltos los problemas por parte de los estudiantes, se debe pasar a la fase de discusión de las soluciones, por parte de los estudiantes. La función del profesor en esta etapa es la de guiar la discusión por medio de preguntas, preferiblemente ya elaboradas anteriormente, dirigidas hacia aquellos aspectos más polémicos, para revelar la esencia del fenómeno objeto de estudio, sus regularidades, sus casos límites, sus nexos, además de discutir aquellos elementos del método que constituyen las premisas para la solución de los problemas de ese tipo, lo cual permite generalizar el método de solución.

Concluida la clase de ejercicios debe orientarse nuevamente problemas que posibiliten el entrenamiento de los estudiantes durante el estudio independiente. Además, al finalizar el tema puede realizarse una clase resumen que permita la integración de los contenidos abordados en el tema, a través de la discusión de problemas semejantes a los problemas tipo III. Esta clase permitirá al profesor controlar la forma en que ha sido asimilada la habilidad por parte de los estudiantes.

Todo lo anterior apunta hacia una concepción de proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática desde una perspectiva social. Es preciso crear escenarios activos de conocimiento compartido, a partir de las interacciones entre los involucrados de enseñar y aprender.

### 3. Sistema de ejercicios para el desarrollo de habilidades en la resolución de problemas trigonométricos

En el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, y específicamente los ejercicios y problemas trigonométricos, permiten a los estudiantes colocarse ante situaciones que buscan la realización de una secuencia lógica de acciones para poder obtener un resultado. El tema de las razones trigonométricas no está exento de esto, así como la resolución de triángulos y de problemas de la vida cotidiana con la aplicación de la trigonometría. Cada uno de estos temas también contribuye en el

desarrollo de manera integral y de un pensamiento divergente y reflexivo de los estudiantes.

Según el nivel de asimilación de los estudiantes y las diferencias individuales de los mismos, la familia de problemas que se propone comenzará por ejercicios elementales, preparatorios, simples. Es a partir de ellos que se estructura de forma lógica y con carácter ascendente en su grado de dificultad el resto de los ejercicios. Estos ubican a los estudiantes ante nuevas situaciones y necesidades de interactuar con el conocimiento matemático.

El conocimiento matemático, según Sampedro (2011) incluye el conocimiento conceptual (saber) y se refiere a los conceptos matemáticos, teoremas, axiomas, proposiciones y procedimientos, así como las relaciones entre ellos y el procedimental (saber hacer), que se refiere a las habilidades Matemáticas específicas. Entre ellas, para los estudiantes de secundaria de II ciclo, se destacan calcular, resolver, demostrar, modelar, analizar, comparar, caracterizar e interpretar objetos matemáticos. Al mismo tiempo, el saber ser está caracterizado por los valores que han sido interiorizados por el sujeto y que lo distingue de manera trascendente en su actuación, entre los que se destacan la responsabilidad, el compromiso personal y social, la flexibilidad y la crítica reflexiva.

Como es sabido, la resolución de problemas es de reconocida importancia en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. Como consecuencia, el sistema de problemas presentado posee en su estructura organizativa problemas tipo I, problemas tipo II y problemas tipo III.

La trigonometría es parte de la Matemática que establece la relación entre los ángulos y los lados de un triángulo, relación fundamental para la resolución de problemas relacionados al cálculo de las magnitudes y medidas de lados y ángulos de triángulos semejantes y también de polígonos, ya que los polígonos se pueden dividir en un número determinado de triángulos, por ser el triángulo el polígono de menor número de lados.

En el programa angoleño de Matemáticas de secundaria de II ciclo, se proponen ejercicios y problemas con el objetivo de:

- Calcular la amplitud de los ángulos tanto en el sistema circular como en el sexagesimal.
- Calcular las razones trigonométricas de ángulos agudos en un triángulo rectángulo.
- Calcular las razones trigonométricas y utilizar las formulas y resultados de referencia (relación fundamental de la trigonometría).
- Resolver triángulos rectángulos y triángulos cualesquiera.

Para iniciar este tema de trigonometría deben proponerse a los estudiantes problemas variados ligados a situaciones concretas, donde se apliquen las razones trigonométricas. Es imprescindible presentar problemas relacionados con la vida cotidiana, de modo que se comprenda la importancia socio cultural, histórica y científica de la trigonometría.

Es importante que los estudiantes comprendan principalmente las relaciones:

$$a) \text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1$$

$$b) \tan x = \text{sen} x / \text{cos} x$$

$$c) \cot x = \text{cos} x / \text{sen} x$$

$$d) 1 + \tan^2 x = 1 / (\text{cos}^2 x)$$

Para resolver ejercicios y problemas primero rutinarios, en los cuales se utilicen puramente las técnicas de cálculo y luego problemas de aplicación.

#### 4. Ejemplos de problemas

Problemas tipo I

1. Indique en el sistema circular las amplitudes de los ángulos siguientes:

$$30^\circ .$$

$$45^\circ .$$

$$120^\circ .$$

$$245^\circ .$$

$$330^\circ .$$

2. Indique en el sistema sexagesimal las amplitudes de los ángulos siguientes:

$$\frac{2\pi}{3} .$$

$$\frac{5\pi}{6} .$$

$$\frac{7\pi}{2} .$$

$$\frac{5\pi}{3} .$$

3. Determinar el valor numérico de las siguientes expresiones.

$$a) \text{sen} \pi/2 + \cos 30^\circ - \tan 45^\circ$$

$$b) \text{sen} 5\pi/2 + \cos 60^\circ + \tan \pi/6$$

$$c) (\cos 90^\circ + \text{sen} 0^\circ) / (\cot 5\pi/4)$$

4. Calcula la razón trigonométrica indicada:

a)  $\text{sen}x = 3/4$  hallar  $\text{cos}x$

b)  $\text{cos}x = 5/7$  hallar  $\text{sen}x$

c)  $\text{tan}x = 3/4$  hallar  $\text{cot}x$

d)  $\text{cot}x = 5/4$  hallar  $\text{tan}x$

5. En un triángulo rectángulo ABC, rectángulo en A, AB=3,0 cm, AC=4,0 cm y CB=5,0 cm. Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudo  $\alpha$  y  $\beta$ .

Problemas tipo II

1. Señala la respuesta correcta:

a)  $\text{sen}60^\circ$

$\frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad 0$

b)  $\text{cos}30^\circ$

$\frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad 1$

c)  $\text{tan}30^\circ$

$\frac{3}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \sqrt{3}$

d)  $\text{tan}30^\circ$

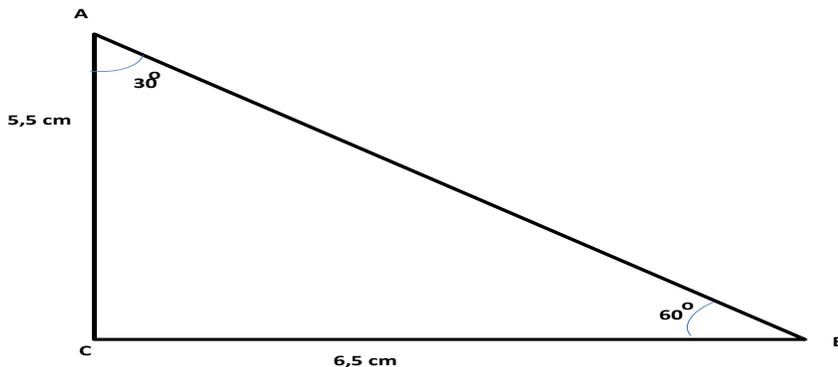
$\frac{\text{cot}30^\circ \text{cot}45^\circ \text{cot}60^\circ \text{cot}\pi}{3}$

2. Siendo ABC un triángulo rectángulo en C, en que la medida de los lados AC=2,0 cm y CB=4,0 cm, calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos.

3. Completa los espacios en blanco:

	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
$\text{sen}x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$\text{cos}x$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\text{tan}x$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$		
$\text{cot}x$			$\sqrt{3}$

4. Dado el triángulo ABC rectángulo en C, calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos:



5. Aplica las fórmulas trigonométricas y simplifica las siguientes expresiones.

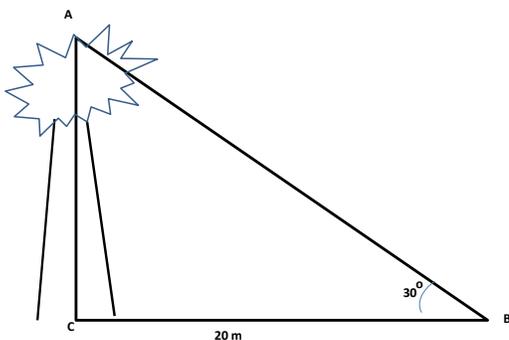
- a)  $\frac{\sin^2 x}{1 - \cos^2 x}$
- b)  $\frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x} \cdot \cot^2 x$
- c)  $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2$

Problemas tipo III

1. Calcula

- a)  $(\sin 270^\circ - 0.5 \sin 90^\circ \cdot \tan 45^\circ) / (\tan 30^\circ + \cos 540^\circ - \sin 360^\circ)$
- b)  $\sqrt{(\tan 180^\circ \cdot \sin 313^\circ - \sin 0^\circ) / (-4 \sin 270^\circ + 5 \cos 360^\circ)}$

2. Calcula la altura de un árbol con los datos que aparecen en la figura.



3. Colocado a 20 m de altura de un hasta de una bandera, Joao ve la extremidad superior del asta bajo un ángulo de  $24^\circ$  en dirección al horizonte. Ayuda a Joao a calcular la altura del asta.

4. Un grupo de estudiantes de la escuela Comandante Dangereux de Huambo, visitó el monumento Cristo Rey en Huila. Un estudiante

colocado en la cima del monumento ve aproximarse un auto bajo un ángulo de  $83^\circ$ , luego de pasar algún tiempo ve el mismo automóvil bajo un ángulo de  $36^\circ$ . Finalmente observó que el automóvil tenían una trayectoria rectilínea en dirección a la torre. ¿Cuántos metros recorrió el automóvil entre las dos observaciones, si sabes que la altura del monumento es de 14 metros?

5. Demuestra que:

$$a) [\text{sen}]^4 x - [\text{cos}]^4 x = 2 [\text{sen}]^2 x - 1$$

$$b) (\cot x - 1/\text{sen} x)^2 = (1 - \cos x)/(1 + \cos x)$$

Con la elaboración del sistema de problemas para el desarrollo de habilidades en la resolución de problemas trigonométricos se potencia que los estudiantes desarrollen el razonamiento lógico mientras se enfrentan a los problemas propuestos, y no solo se dediquen al uso estandarizado de fórmulas, relaciones y de reglas.

5. Pertinencia y factibilidad del sistema de ejercicios propuesto

El estudio en detalles se puede encontrar en J. D. Chico (2016). De manera general los resultados obtenidos revelan que los ejercicios y problemas propuestos son pertinentes para lograr que los estudiantes aprendan los contenidos que aparecen en el programa de Matemática del segundo Ciclo de la Enseñanza Secundaria angoleña. Igualmente se comprobó la factibilidad de introducir el cuaderno de problemas en la práctica educativa.

En las figuras 2 y 3 se puede apreciar la transformación en el rendimiento de los estudiantes como resultado de la puesta en funcionamiento de la propuesta de este trabajo. En ellas es evidente la tendencia a mejorar los niveles de conocimiento, motivación e independencia en los estudiantes para resolver problemas trigonométricos.

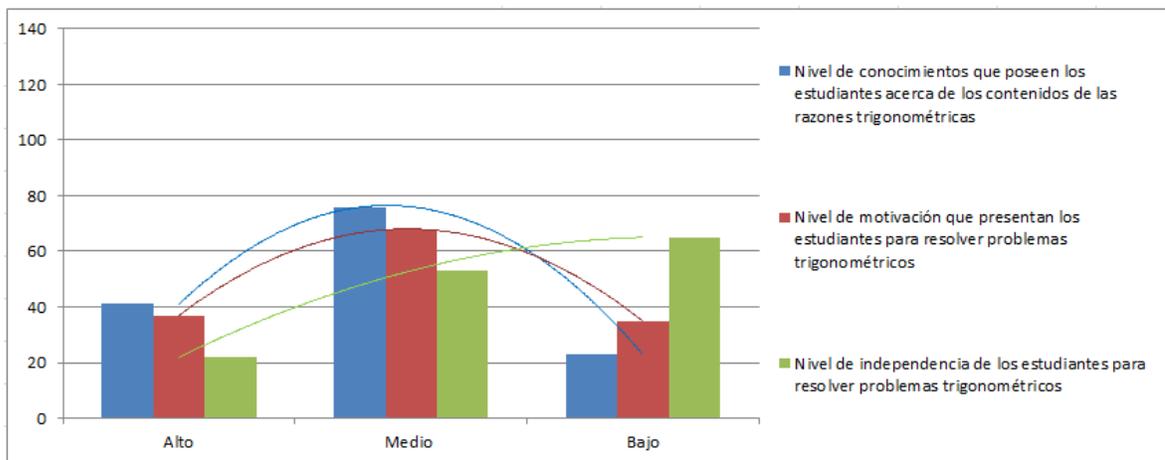


Figura 2: Resultados finales del diagnóstico de los estudiantes en la implementación de la propuesta.

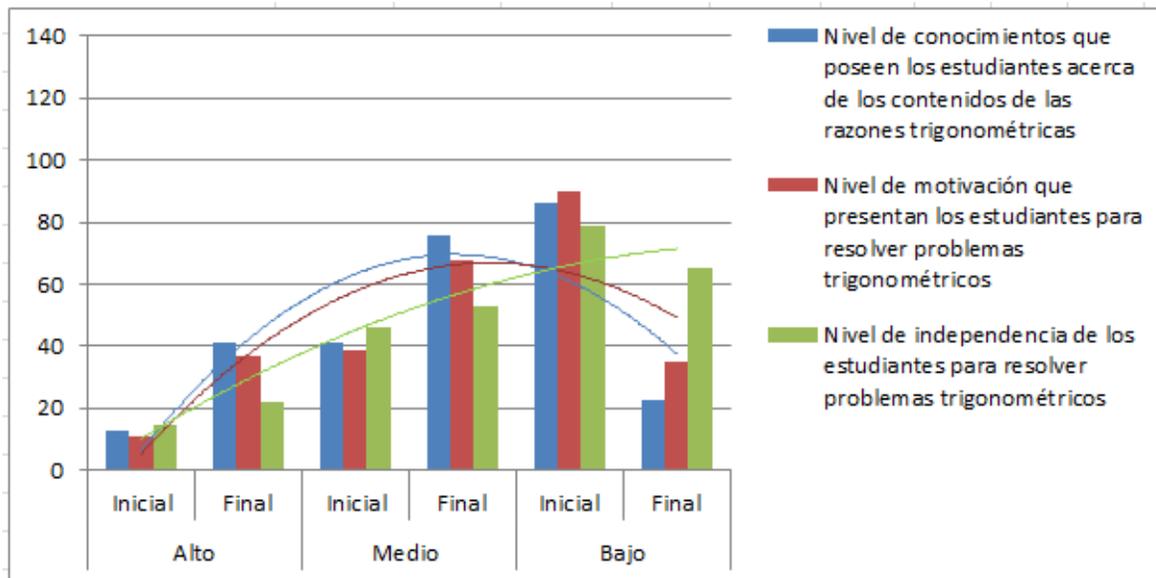


Figura 3: Comparación de resultados iniciales y finales del diagnóstico de los estudiantes en la implementación de la propuesta

## CONCLUSIONES

El sistema de ejercicios y problemas trigonométricos se caracteriza por ser flexible y adaptable a las condiciones cambiantes del grupo de estudiantes, de forma tal que pueda adaptarse a las necesidades del grupo en general y el alumno en lo particular. Por tal motivo debe estar en correspondencia con el contexto real, con la característica de que podrá adecuarse o reelaborarse constantemente.

El sistema propuesto favorece el aprendizaje de los estudiantes, pues los pone en la necesidad de interactuar con el conocimiento, en niveles de profundidad creciente, en función de los objetivos de la asignatura, incluyen la exigencia que propician el desarrollo de habilidades en la resolución de problemas de trigonometría y el desarrollo integral de los estudiantes en la clase, estimula su papel protagónico en el aprendizaje, así como la búsqueda de causas, argumentos, desarrollo del pensamiento hipotético, lógico y reflexivo.

Los resultados de la valoración de pertinencia y factibilidad de la alternativa propuesta en los estudiantes de oncenso grado, dan cuenta de la viabilidad de la propuesta y del efecto favorable esperado una vez introducido en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en el Segundo Ciclo de la Enseñanza Secundaria angoleña.

## REFERENCIAS

- Ballester, S. y otros. (1992) Metodología de la Enseñanza de la Matemática, Tomo I, Editorial Pueblo y Educación, Habana.
- Bemba, M. (2012). Realidades de las escuelas angolanas del segundo ciclo de la enseñanza secundaria sobre la instrucción heurística en la

Matemática, [http://www.uls.edu.mx/public\\_html/publicaciones/onteanqui/b10/ambientes.html](http://www.uls.edu.mx/public_html/publicaciones/onteanqui/b10/ambientes.html)]. [Consulta: 22-07-2012].

Chico, J, D. (2016). Sistema de ejercicios para el desarrollo de habilidades en la resolución de problemas de trigonometría de los estudiantes de secundaria de II Ciclo, 4 de abril en Caála, Huambo, Angola. Tesis presentada en opción al Título de Máster en Didáctica de la Educación superior. CEDUT. Universidad de Las Tunas.

Cipriano, M. (2014). Manual para el desarrollo del aprendizaje autónomo da Matemática de nos estudantes da 7ªclase de la escuela Teresiana Santo Henrique de Osso da Cidade de Huambo-Angola. Tesis presentada en opción al Título de Máster en Didáctica de la Educación superior. CEDUT. Universidad de Las Tunas.

González, F (1996). Psicología Principios y Categorías. Editorial de Ciencias Sociales, La Habana.

Guzmán, M. (1991) Matemáticas I. Ediciones ANAYA S. A. España.

Hernández, H. (1992). Sistema Básico de Habilidades Matemáticas. En Didáctica de la Matemática. Artículos para el Debate. EPN. Quito. Ecuador.

Mestre, U. (1996). Modelo de organización de la disciplina Física General para la formación profesional de estudiantes de Ciencias Técnicas. Tesis de Doctorado de Ciencias pedagógicas.

Polya, G. (1953). Matemáticas y razonamiento plausible. Editora. Tecno. Madrid.

Rico, L. (1998). Didáctica de la Matemática como campo de problemas. [Recuperado en: [http://www.ugr.es/dpto\\_did/](http://www.ugr.es/dpto_did/) Las Palmas]. [Consultado el 13-06-2013].

Sakala, H. (2014). Desarrollo de habilidades en la resolución de problemas de geométricos de los estudiantes de noveno grado del colegio Novo Reflexo de Huambo, Angola. Tesis presentada en opción al Título de Máster en Didáctica de la Educación superior. CEDUT. Ciudad de las Tunas.

Sampedro, R. (2011). Estrategia Didáctica para favorecer la formación y desarrollo de la competencia gestionar el conocimiento matemático desde la dinámica del proceso docente educativo de la Matemática de las carreras de ingeniería. Tesis de doctorado, Centro de Estudios para la educación superior de la Universidad de Camagüey. Cuba.

Santos, L. (1993). La Resolución de Problemas en el aprendizaje de las Matemáticas. Cuaderno de investigación No. 28/6. Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV. México.

Schoenfeld, A. (1983). Ideas y tendencias en la Resolución de Problemas. Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid. España.

Silva C. (1999), Matemáticas I. Ediciones ANAYA S. A. España.

