DESARROLLO DEL PENSAMIENTO FUNCIONAL EN LOS EDUCANDOS USANDO COMO HERRAMIENTA LA APLICACIÓN GEOGEBRA

DEVELOPMENT OF FUNCTIONAL THINKING IN LEARNERS USING THE GEOGEBRA APPLICATION AS A TOOL

AUTORES: Raúl López Fernández[1]

Eric Crespo Hurtado[2]

Tomas Crespo Borges[3]

DIRECCIÓN PARA CORRESPONDENCIA: lopezfernandezruly@gmail.com

Fecha de recepción: 15-05-2018

Fecha de aceptación: 26-06-2018

RESUMEN

La Matemática en general y el Álgebra en particular son disciplinas de difícil comprensión para los alumnos. El presente trabajo tiene como objetivo promover un pensamiento funcional utilizando, el software GeoGebra, desde la solución de un problema de la vida práctica como una experiencia de enseñanza. Los métodos fundamentales fueron, desde lo teórico el analítico sintético y el inductivo deductivo y desde el nivel empírico la encuesta. La experiencia fue realizada con estudiantes de primer ingreso, al detectar graves deficiencias en conceptos algebraicos y fun-cionales. Los resultados fundamentales estuvieron en el logro de solucionar pro-blemas prototípicos de la vida práctica y las habilidades en la herramienta del soft-ware GeoGebra el cual posibilitó desarrollo del pensamiento funcional.

PALABRAS CLAVE: software GeoGebra; pensamiento funcional; Álgebra; resolución de problemas.

ABSTRACT

Mathematics in general and Algebra in particular are disciplines that are difficult for students to understand. The present work aims to promote functional thinking using GeoGebra software, from the solution of a problem of practical life as a teaching experience. The fundamental methods were, from the theoretical the synthetic analytic and the inductive deductive and from the empirical level the survey. The experience was carried out with first-year students, detecting serious deficiencies in algebraic and functional concepts. The fundamental results were in the achievement of solving

[1] Licenciado en Educación especialidad Matemática. Doctor en Ciencias Pedagógicas, Profesor Titular, Carrera de Gestión Empresarial, Universidad Metropolitana, Ecuador.

[2] Licenciado en Educación especialidad Matemática. Doctor en Ciencias Pedagógicas, Profesor Titular, Carrera de Matemáticas, Universidad Central de las Villas, Cuba. E-mail: ecrespo@uclv.cu

[3] Licenciado Matemática. Doctor en Ciencias de la Computación, Profesor Titular, Carrera de Matemáticas, Universidad Central de Las Villas, Cuba. E-mail. crespoborges@nauta.cu

prototypical problems of practical life and skills in the GeoGebra soft-ware tool which enabled the development of functional thinking.

KEYWORDS: GeoGebra software; functional thinking; algebra; problem solving.

INTRODUCCIÓN

En “La competencia matemática en PISA4” se plantea: “Cada fenómeno natural es una manifestación del cambio; el mundo en nuestro entorno muestra una multitud de relaciones temporales y permanentes entre fenómenos. Algunos ejemplos los proporcionan los organismos cuando crecen y sus cambios, los ciclos de las estaciones, el flujo y reflujo de las mareas, los ciclos de empleo y desempleo, los cambios climáticos y los cambios en los indicadores económicos. Algunos de los procesos de cambio pueden ser descritos y modelados directamente mediante funciones matemáticas: lineales, exponenciales, periódicas o logísticas, discretas o continuas”.

Las relaciones matemáticas tienen usualmente la forma de ecuaciones o de desigualdades, pero también se presentan relaciones de naturaleza más general.

El pensamiento funcional, es decir, pensar en términos de y acerca de relaciones, es una meta disciplinar fundamental en la enseñanza de las matemáticas. Las relaciones pueden representarse mediante una diversidad de sistemas, incluyendo símbolos, gráficas, tablas y dibujos geométricos. Distintas representaciones pueden servir para propósitos diversos y tener propiedades diferentes. (Rico, 2012)

Pero en un mundo informatizado, donde las computadoras han llegado a nuestras aulas para quedarse, ellas contribuyen de forma especial al desarrollo del pensamiento funcional mediante el empleo de los asistentes matemáticos y entre ellos se destaca el Geogebra, por integrarse la facilidad de los cálculos, las representaciones gráficas y la modelación matemática.

DESARROLLO

Las Matemáticas se imparten en las escuelas, además de potenciar el pensamiento reflexivo, creativo, lógico, entre otros, potenciando el aprendizaje desarrollador con la finalidad de poder resolver que se le presenta a los seres humanos en su actuar diario tanto en su profesión como en los problemas de la vida cotidiana. (López Fernández, 2017)

La propuesta se ejemplifica a partir de un problema frecuente en niños, adolescentes y jóvenes.

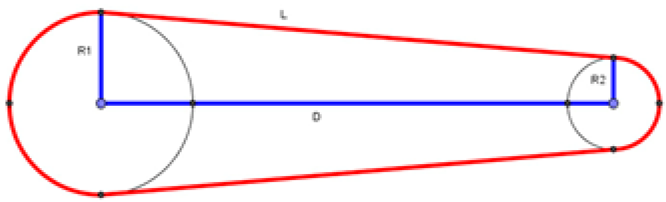
De una bicicleta se conoce:

- El radio del piñón mayor (R1 cm)
- El radio del piñón menor (R2 cm)
- La distancia entre los centros de los piñones (D cm)

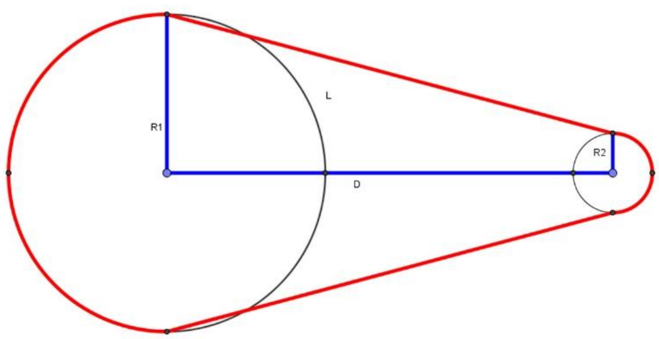
[4] Programme for International Student Assessment, PISA

Deduzca la fórmula que permita determinar la longitud “L” de la cadena. (Ballester, 2001)

Para comprender el problema se hace necesario dirigir la reflexión sobre si es posible la confección de una figura de análisis que ilustre la situación planteada, a los alumnos se les puede sugerir u orientar, a modo de impulso heurístico, la construcción de la figura de análisis del problema con ayuda del GeoGebra[5] u otro software de Geometría Dinámica. (Algarabel, 1996) (Crespo, 2009)

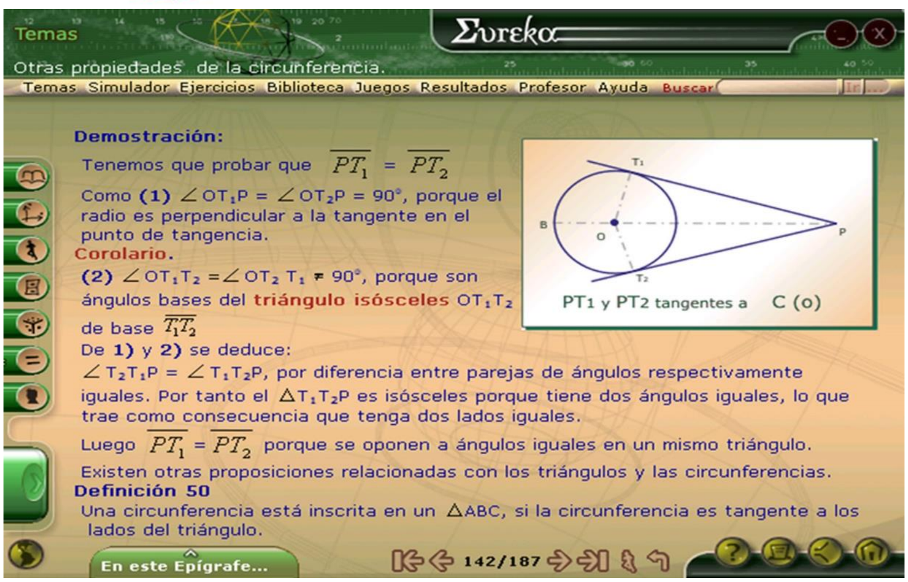


En la solución más frecuente dada por los alumnos en un primer boceto se muestra en el gráfico adjunto.



Pero aplicando el principio de movilidad sobre uno cualquiera de los radios o sobre la distancia entre los piñones se obtienen resultados como el que se muestra en el gráfico.

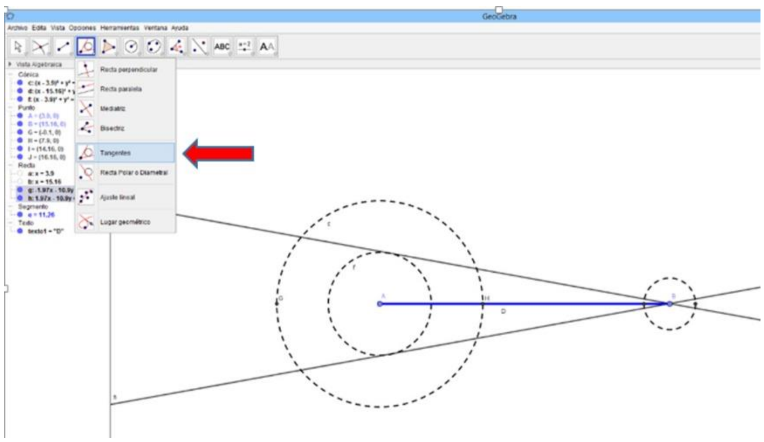
Una nueva información es necesaria para abordar el problema y la misma se puede encontrar en el software Eureka de la colección Futuro.



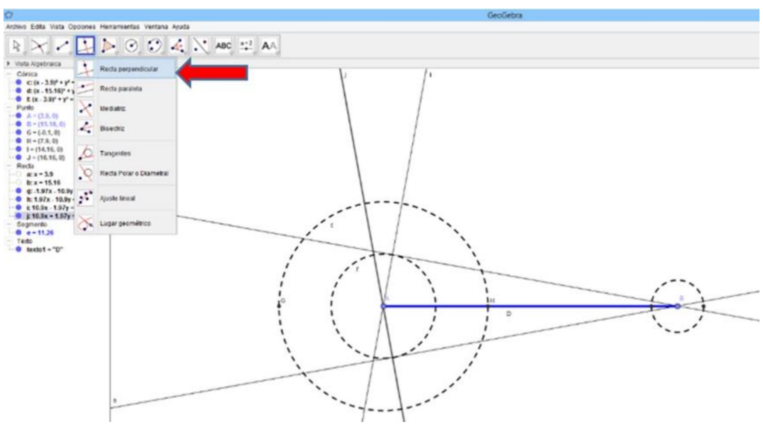
[5] **GeoGebra** es un software matemático interactivo libre para la educación en colegios y universidades. Su creador Markus Hohenwarter, comenzó el proyecto en el año 2001 en la Universidad de Salzburgo y lo continúa en la Universidad de Atlantic, Florida.

La siguiente secuencia de imágenes permite obtener el gráfico deseado

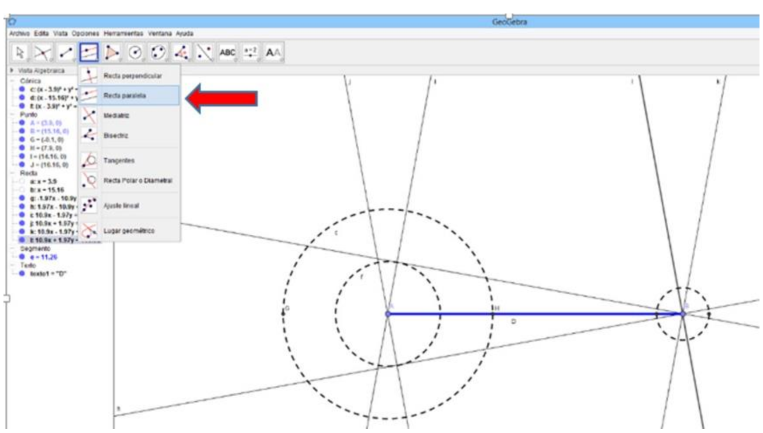
Traza las tangentes a una circunferencia interior del piñón mayor y radio igual a $\frac{R1}{2}$.



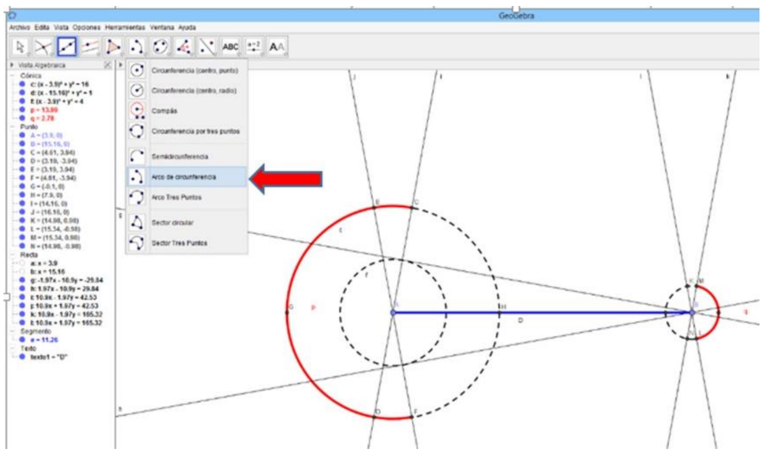
Traza perpendicular a las tangentes que contienen los radios de las circunferencias.



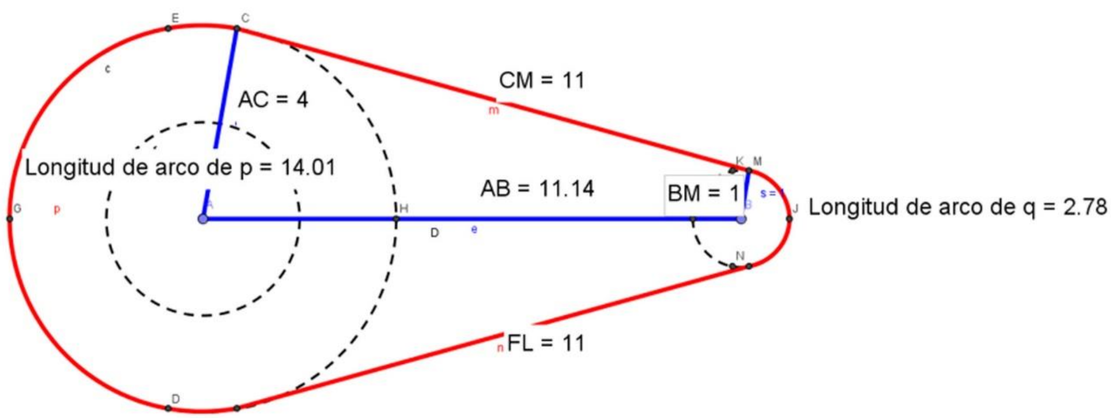
Trazas paralelas a las tangentes anteriores en el piñón más pequeño.



Traza los arcos de circunferencias correspondientes a la cadena al cruzar por cada piñón.

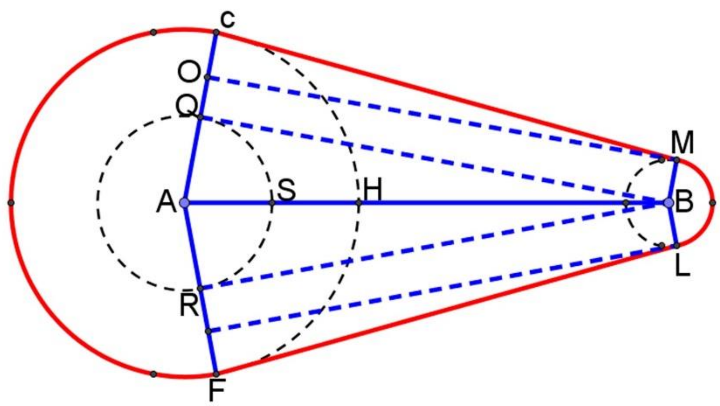


Esquema final con las correspondientes medidas dadas sobre el gráfico por GeoGebra (se advierte que estas “medidas” no necesariamente se corresponden con la realidad, se han tomado por su facilidad para hacer una demostración):



A partir de una figura análoga a la anterior, el alumno puede hacer una valoración de la solución del problema y utilizando las posibilidades de movilidad que brinda GeoGebra y con ello se puede ilustrar la dependencia funcional entre la longitud de la cadena y la distancia que separa los centros de los piñones cuando se mantienen los radios con valores constantes, para ello vasta con mover el punto B a lo largo de la línea que contiene al segmento $\overline{AB}$ y observar las variaciones en la longitud calculada de la cadena. En forma análoga se puede mostrar la dependencia con las longitudes de los radios cuando se mantiene fija la distancia entre los piñones representados por las dos circunferencias. (Benedicto, 2013)

Con el ejemplo se da un primer acercamiento al pensamiento funcional que mediante la solución de este problema se puede mostrar que se está en presencia de la relación gráfica a la que hace referencia el documento antes mencionado y que se hace objetivamente visible gracias a las posibilidades que brinda el GeoGebra, al igual que otros software de Geometría Dinámica. (Martínez, 2013)



De la solución particular se puede inferir la general. Auxiliándose de la figura de análisis, los alumnos pueden darse cuenta que la vía de solución está dada en determinar la longitud de la cadena que se muestra y que la misma viene dada a partir de la suma de las mediciones que puede realizar de los segmentos $\overline{CM}$ y $\overline{FL}$, así como, los arcos p y q. Por tales motivos se puede plantear que la longitud de la cadena se calcula mediante la suma que se muestra en la figura.

A la pregunta ¿cómo podemos determinar las longitudes de los segmentos y de los arcos, conociendo los radios de los piñones y la distancia entre ellos?, los alumnos pueden plantear la fórmula de las longitudes de los arcos a partir de la longitud de la circunferencia o la amplitud de un arco

Tan solo falta inferir cómo determinar las longitudes de los segmentos. A partir de la medición hecha con el asistente de Geometría Dinámica se tiene la expresión: (Torres, 1997)

$$\overline{CM} + \overline{FL} + longitud\ del\ arco\ q + longitud\ del\ arco\ p$$
$$= 11cm + 11cm + 2{,}78cm + 14{,}01cm = 38{,}79cm$$

Esto posibilita proceder con un paso hacia atrás, sustituyendo cada elemento por la correspondiente fórmula para llegar al resultado esperado que es el cálculo de L que está dado por la expresión: (Müller, H. 1990)

$$L = \overline{CM} + \overline{FL} + longitud\ del\ arco\ q + longitud\ del\ arco\ p$$

Las relaciones entre estas magnitudes se pueden analizar mejor a partir de la gráfica adjunta.

Los datos del problema se identifican en la gráfica del siguiente modo:

$\overline{MB} = R2$, $\overline{CA} = R1$, $\overline{AB} = D$ y $\overline{QA} = \frac{R1}{2}$ por construcción

$$\overline{BQ} = \sqrt{D^2 - \left(\frac{R1}{2}\right)^2}$$

Por ser $\overline{BQ} = \overline{OM}$ se tiene:

$\overline{CM} = \sqrt{(R1 - R2)^2 + \overline{BQ}^2}$ Además se tiene que $\overline{CM} = \overline{FL}$

En cuanto al arco $Longitud\ de\ Arc(FC)$ se tiene que:

$Longitud\ de\ Arc(FC) = 2\pi R1 - Longitud\ de\ Arc(CF)$

Como $\measuredangle CAF$ es un ángulo central y la amplitud de un arco de la circunferencia es igual a la amplitud del ángulo central correspondiente entonces basta conocer la amplitud de

$$\measuredangle CAF = \measuredangle QAR = 2\measuredangle QAS = 2\ ArcoCoseno\left(\frac{\frac{R1}{2}}{D}\right)$$

$$Longitud\ de\ Arc(FC) = 2\pi R1 - 2\ R1ArcoCoseno\left(\frac{\frac{R1}{2}}{D}\right)$$

En forma análoga se puede concluir que

$$Longitud\ de\ Arc(ML) = 2\ R2ArcoCoseno\left(\frac{\frac{R1}{2}}{D}\right)$$

A partir de las inferencias hechas los alumnos pueden plantear las justificaciones matemáticas y llegarán a la primera fórmula deseada.

$$L = 2\left(\sqrt{(R1 - R2)^2 + D^2 - \left(\frac{R1}{2}\right)^2}\right) + 2\pi R1 - 2\ R1ArcoCoseno\left(\frac{\frac{R1}{2}}{D}\right) + 2\ R2ArcoCoseno\left(\frac{\frac{R1}{2}}{D}\right)$$

Esta expresión algebraica es otra forma de representar la relación funcional entre L, D, R1 y R2 y que puede evidenciarse con mayor precisión mediante otras expresiones.

Siguiendo a Polya, si se hace una valoración retrospectiva del resultado alcanzado es posible preguntarse: ¿Se obtendrá con esta fórmula los mismos resultados que los obtenidos con la representación geométrica del GeoGebra utilizando para ello las medidas dadas?

Como los cálculos son complicados para los datos asignados, una pequeña tabla utilizando la hoja de cálculo que ofrece GeoGebra puede resolver el problema. Para ello basta definir en una columna las variables que intervienen en la fórmula, otra para los valores que se le asignan a cada una de ellas y en otras celdas las fórmulas asociadas a los datos como se muestra en la figura. Para mayor claridad se incluye al lado de cada cálculo la fórmula según GeoGebra.

Hoja de Cálculo

B6 =2π B2 - 2B2 arcos(B2 / 2 / B4)

	A	B	C
1	Variables	Datos	
2	R1	4	
3	R2	1	
4	D	11.14	
5	L1=	22.724	´=2raízn((B2 - B3)² + B4² - (B2 / 2)²
6	LCF=	14.01	=2π B2 - 2B2 arcos(B2 / 2 / B4)
7	LML=	2.781	=2B3 arcos(B2 / 2 / B4)
8	L-TOTAL=	39.515	=Suma[B5:B7]
9	Diferencia=	0.725	

Obsérvese que hay una diferencia de 0,725 que está dada por el redondeo de la “medición directa” sobre el gráfico de los segmentos hecho por el Geogebra, mientras que las longitudes de los arcos no presentan diferencias.

Ahora se dispone de una representación tabular de la función con la que se puede constatar además la veracidad de la fórmula obtenida, la dependencia funcional analizada en la expresión gráfica de la representación funcional del problema que nos ocupa.

CONCLUSIONES

En este trabajo se ha podido resolver un problema de la vida cotidiana que se presenta con frecuencia, donde ha existido un desarrollo del pensamiento funcional en los educandos, usando como herramienta la aplicación GeoGebra lo cual garantiza motivación, tanto intrínseca como extrínseca y significado a los saberes elementos sólidos del aprendizaje desarrollador.

Se ha logrado que las Matemáticas se pueden ofrecer como una disciplina curricular donde los alumnos gusten de ella y los prepare para la vida, principio esencial de la didáctica de cualquier área del conocimiento.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Algarabel, S.E. (1996). Solución de problemas: Una revisión de la importancia del uso de heurísticos y una evaluación de su utilización en Matemáticas. . Revista Española de Pedagogía. (N. 203,).

Ballester Pedroso, S. y. (2001). Metodología de la Enseñanza de la Matemática I. (Vol. I). Ciudad de la Habana., Ciudad Habana., Cuba: Ed. Pueblo y Educación.

Benedicto Baldonado, C. (2013). ESTUDIO DE FUNCIONES CON GEOGEBRA. Tesis de maestría, Universidad de Valencia., Matemática, Valencia. Recuperado el 15 de Septiembre de 2016, de http://mobiroderic.uv.es/bitstream/handle/10550/25803/Benedicto%20Baldonado%202012.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Enríquez O’Farrill, I., & Crespo Borges, T. (2009). Tecnologías de la información y las Comunicaciones en el proceso de Enseñanza Aprendizaje del preuniversitario. Curso 63.Pedagogía 2009. (D. C. Enríquez, Ed.) La Habana, Cuba: Sello editor Educación Cubana. Ministerio de Educación.

López Fernández, R. (2017). Estrategia de formación continua del docente universitario en la didáctica de los entornos virtuales de aprendizaje (EVA). Revista Conrado, 12-22

Martínez Gómez, J. N. (2013). Apropiación del concepto de función usando el software Geogebra. Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia Facultad de Ciencias Naturales y Exactas, Departamento de Matemáticas y Estadística, Manizales. Obtenido de http://www.bdigital.unal.edu.co/9498/1/8411011.2013.pdf

Müller, H. (1990). El Trabajo Heurístico Y La Ejercitación En La Enseñanza De La Matemática En La Enseñanza General Politécnica Y Laboral. Santiago de Cuba: l I.S.P. "Frank País García".

PISA. (2010). Programme for International Student Assessment. Lima.

Rico, L. (2012). La competencia matemática en PISA. En F. S. (Ed.), La Enseñanza de las matemáticas y el Informe PISA (págs. 21-40). Madrid: Santillana. Obtenido de http://www.google.com.cu/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=2&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEw

Torres Lima, P. (1997). Influencias de la computación en la enseñanza de la matemática. Tesis Doctoral, UCP "Silverio Blanco" SS, Matemática-Computación, La Habana.